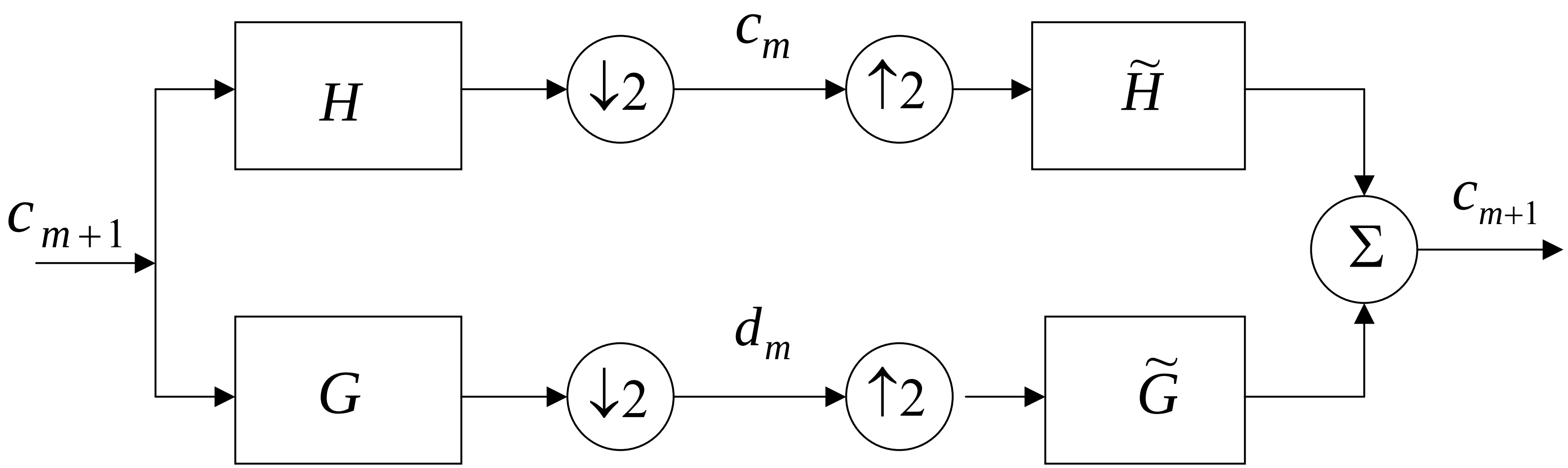
FILTRACJA PODPASMOWA

(ang. SUBBAND FILTERING)

Tematy:

1. Podpróbkowanie
2. Nadpróbkowanie
3. Dwukanałowa filtracja podpasmowa
4. Perfekcyjna rekonstrukcja
5. M-kanałowa filtracja podpasmowa

Dekompozycja i rekonstrukcja falkowa, czyli trochę powtórki

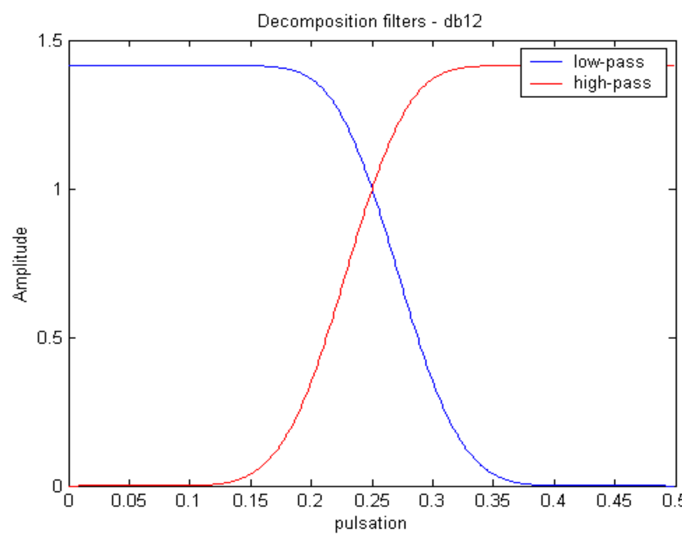


$$s_{m+1}(t) = \sum_n c_{m+1,n} \varphi_{m+1,n}(t)$$

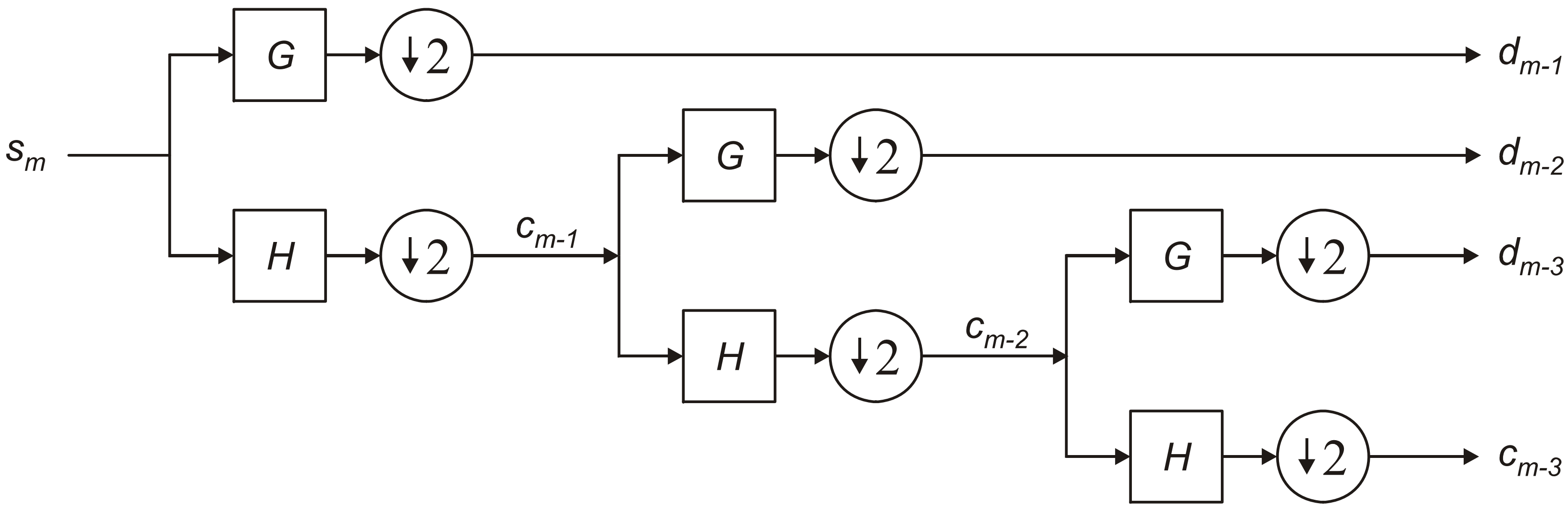
$$c_{m,n} = \sum_k h_{k-2n} c_{m+1,k}$$

$$d_{m,n} = \sum_k g_{k-2n} c_{m+1,k}$$

$$c_{m+1,n} = \sum_k \widetilde{h}_{n-2k} c_{m,k} + \sum_k \widetilde{g}_{n-2k} d_{m,k}$$



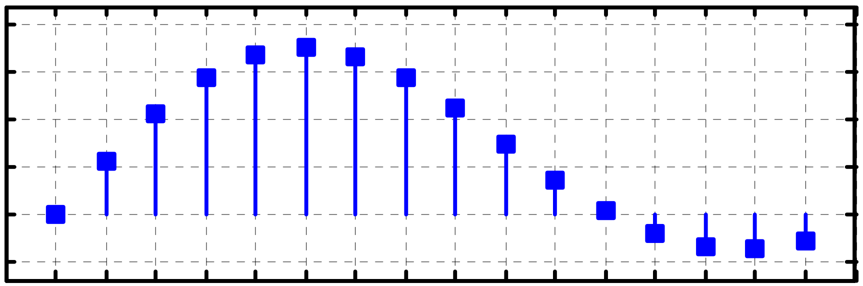
Schemat wielorozdzielczej dekompozycji falkowej (3 poziomy)



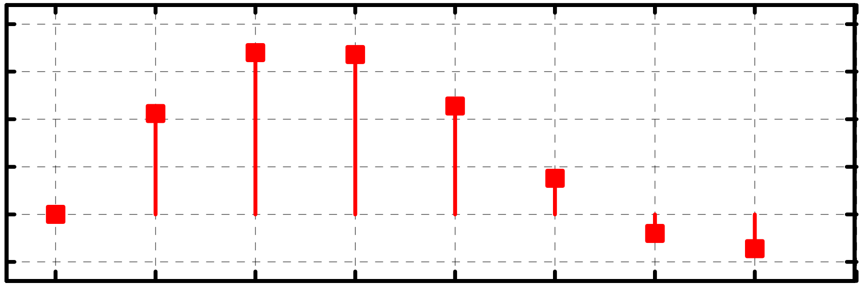
Rysunek podpróbkowania ze stałą 2

(ang. subsampling down-sampling, decimation)

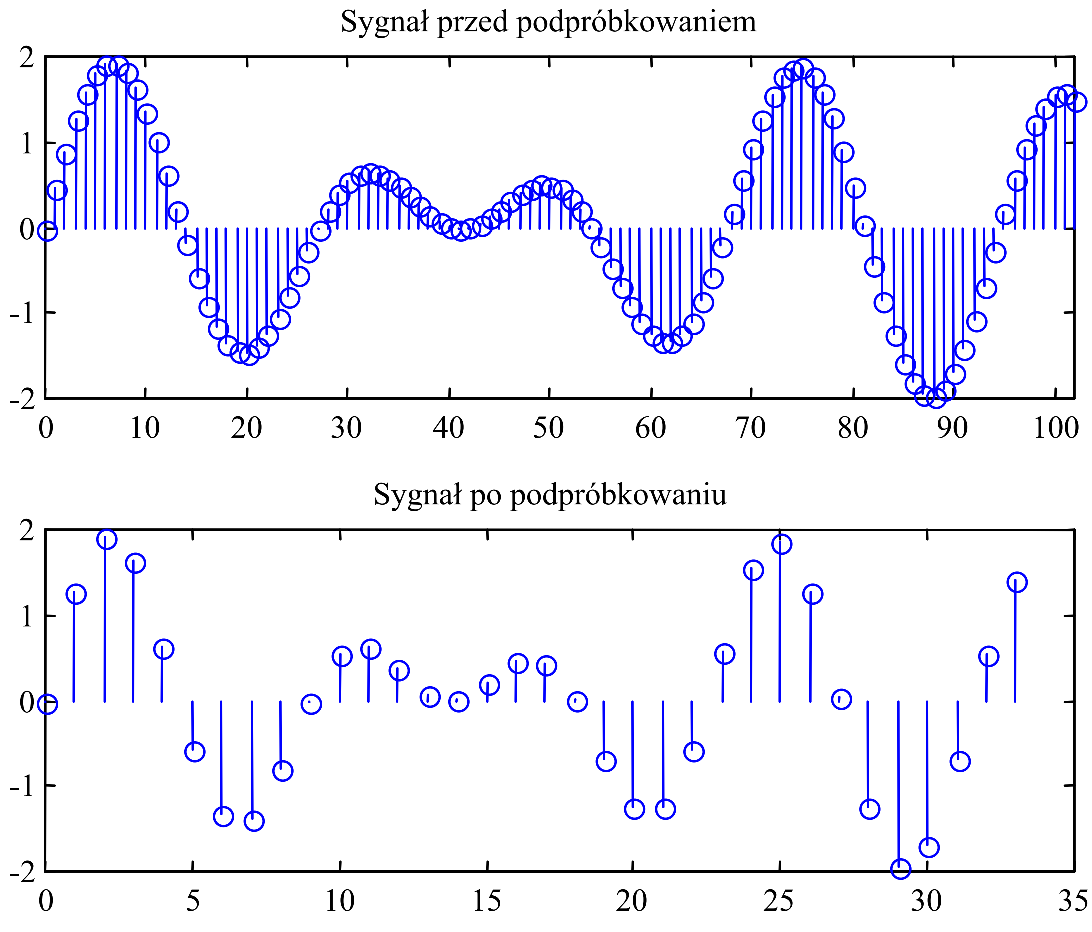
Sygnał oryginalny



Sygnał po podpróbkowaniu



Rysunek podpróbkowania ze stałą M=3



Model matematyczny podpróbkowania ze stałą M

$$s^{we} \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow s^{wy}$$

$$s^{wy}(n) = s^{we}(nM) \qquad \Delta t^{wy} = M \Delta t^{we}$$

$$\boxed{\overline{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \overline{s}^{we}\left(z^{1/M} w_M^m\right)}$$

$$\boxed{z = e^{2\pi j \underline{f}}}$$

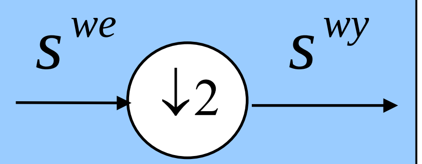
gdzie $\quad w_M = e^{-2\pi j / M}$

$$\boxed{\hat{s}^{wy}(\underline{f}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{s}^{we}\left((\underline{f} - m)/M\right)}$$

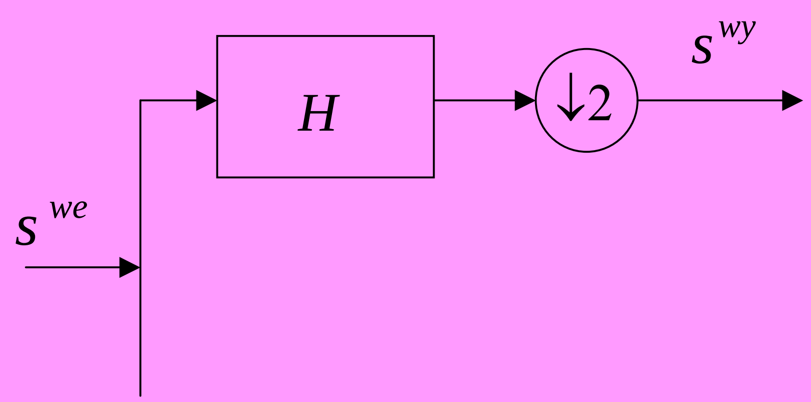
$$\underline{f} = \frac{f}{f_p} \in [0, 0.5]$$

Sprawdzenie modelu $\bar{s}^{wy}(z)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\bar{s}^{we}\left(z^{1/M}w_M^m\right)$ przy podpróbkowaniu ze stałą 2

$$w_2 = e^{-\pi j} = -1$$



$$\bar{s}^{wy}(z) = 0{,}5\left[\bar{s}^{we}(z^{0,5}) + \bar{s}^{we}(-z^{0,5})\right]$$

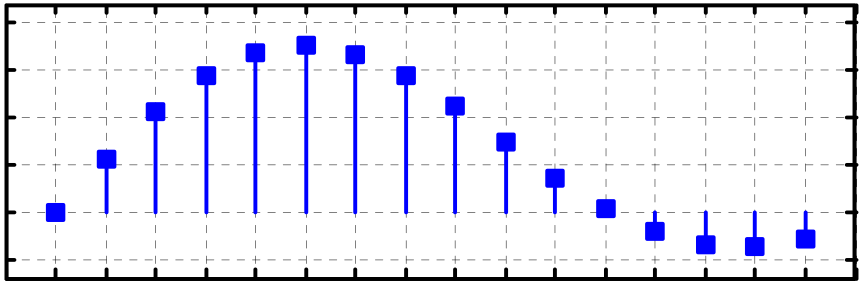


$$\bar{s}^{wy}(z) = 0{,}5\left[H(z^{0,5})\,\bar{s}^{we}(z^{0,5}) + H(-z^{0,5})\,\bar{s}^{we}(-z^{0,5})\right]$$

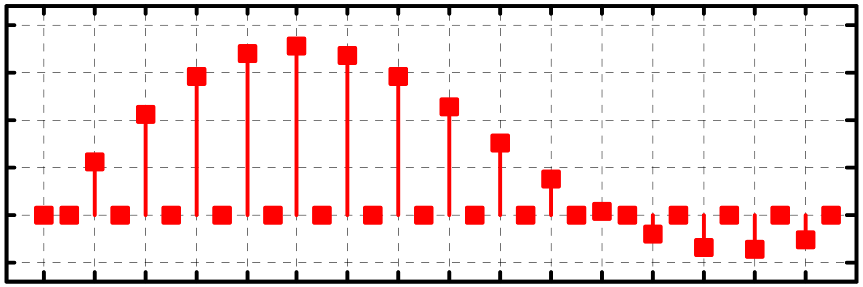
Rysunek nadpróbkowania ze stałą 2

(ang. up-sampling)

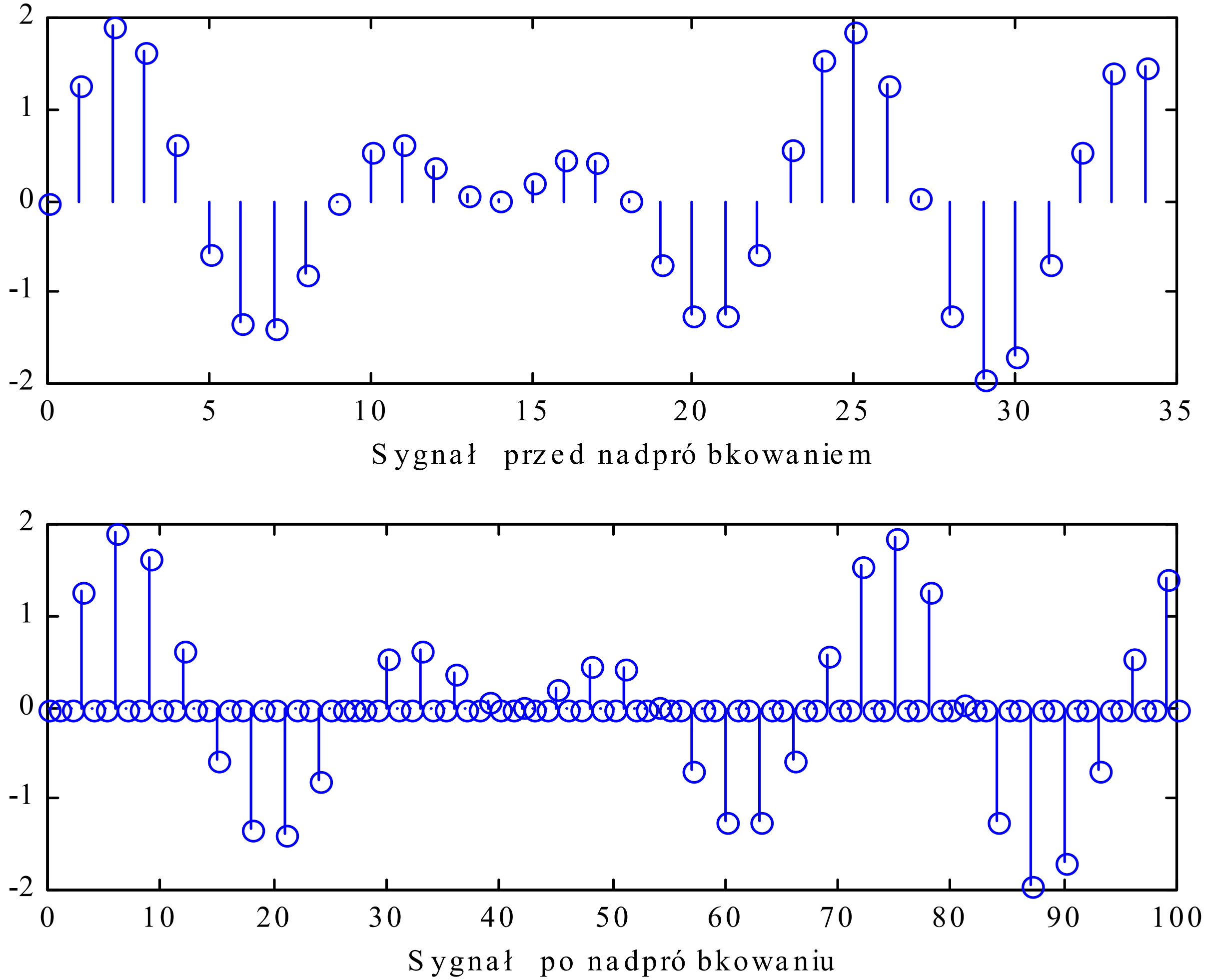
Sygnał oryginalny



Sygnał po nadpróbkowaniu



Rysunek nadpróbkowania ze stałą M=3

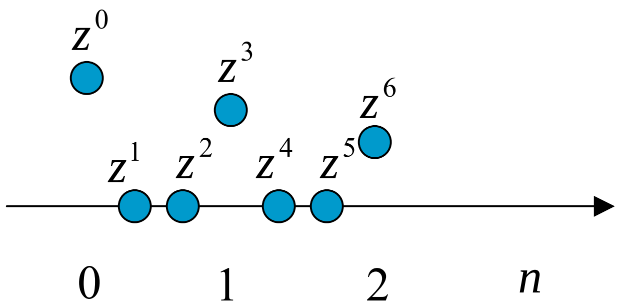


Model matematyczny *M*-nadpróbkowania

$$s^{we} \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow s^{wy}$$

$$s^{wy}(n) = \begin{cases} s^{we}(n/M) & \text{gdy } n \bmod M = 0 \\ 0 & \text{dla pozostalych} \end{cases}$$

$$\sum_n s^{wy}(n)\, z^{-n} = \sum_n s^{we}(n)\, z^{-nM}$$



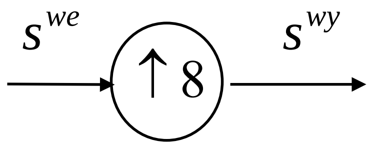
$$\Delta t^{wy} = \Delta t^{we} / M$$

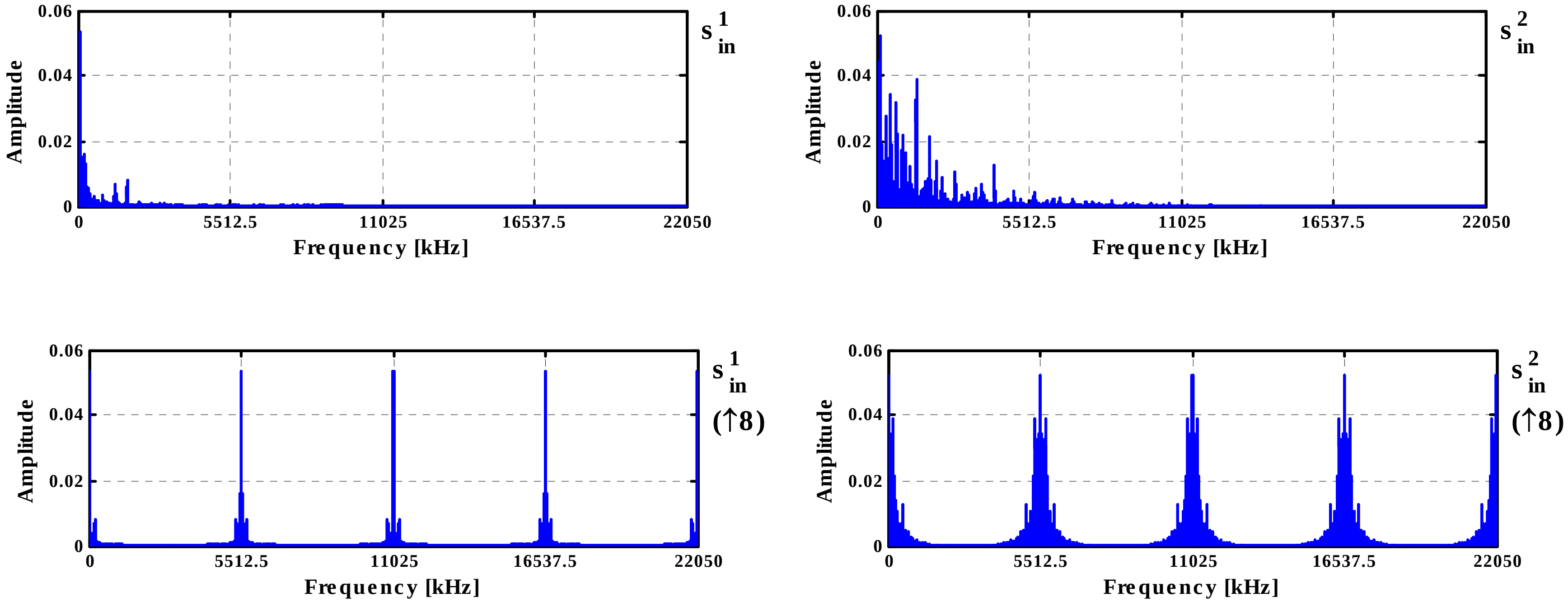
$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = \bar{s}^{we}(z^M)}$$

$$\boxed{z = e^{2\pi j \underline{f}}}$$

$$\boxed{\hat{s}^{wy}(\underline{f}) = \hat{s}^{we}(M\, \underline{f})}$$

Widmo sygnału nadpróbkowanego ze stałą *M*=8





$$\hat{s}^{wy}(\underline{f}) = \hat{s}^{we}(8\underline{f})$$

Przemienność filtracji z pod- i nadpróbkowaniem

Podpróbkowanie:

$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}^{we}\left(z^{1/M} w_M^m\right)}$$

$$\longrightarrow \boxed{H(z^M)} \longrightarrow \downarrow M \longrightarrow \quad \equiv \quad \longrightarrow \downarrow M \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} H\left(w_M^{mM} z^{M/M}\right)\bar{s}^{we}\left(w_M^m z^{1/M}\right) = H(z)\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}^{we}\left(w_M^m z^{1/M}\right)$$

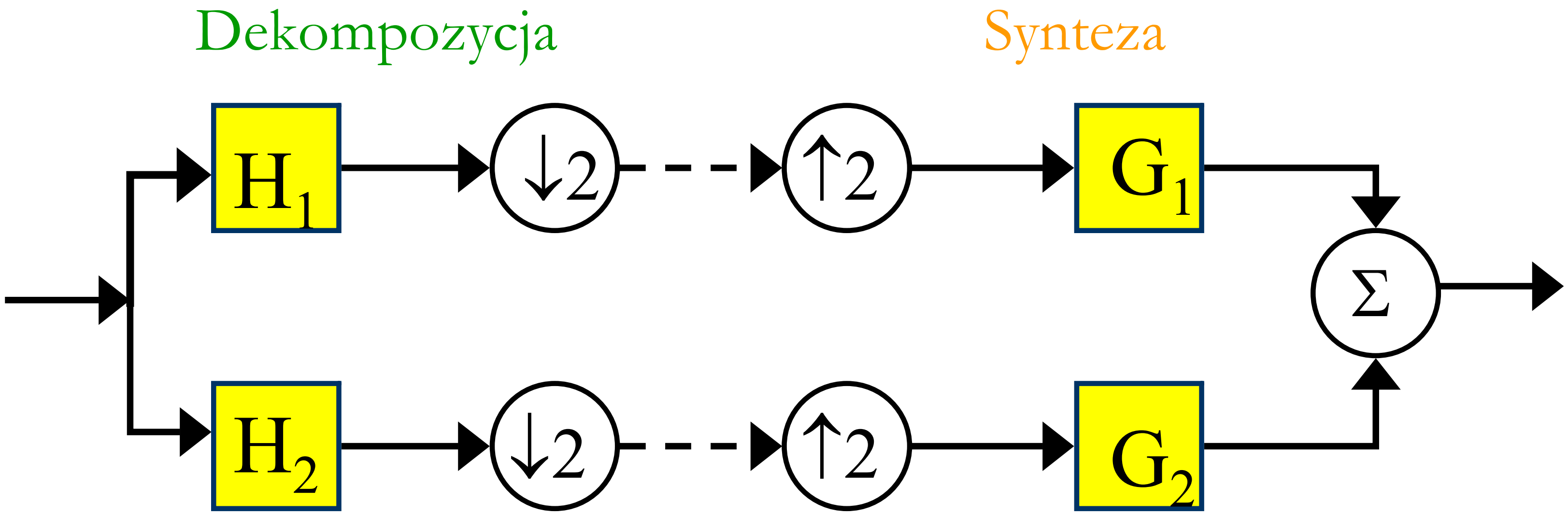
$$\longrightarrow \uparrow M \longrightarrow \boxed{G(z^M)} \longrightarrow \quad \equiv \quad \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow \uparrow M \longrightarrow$$

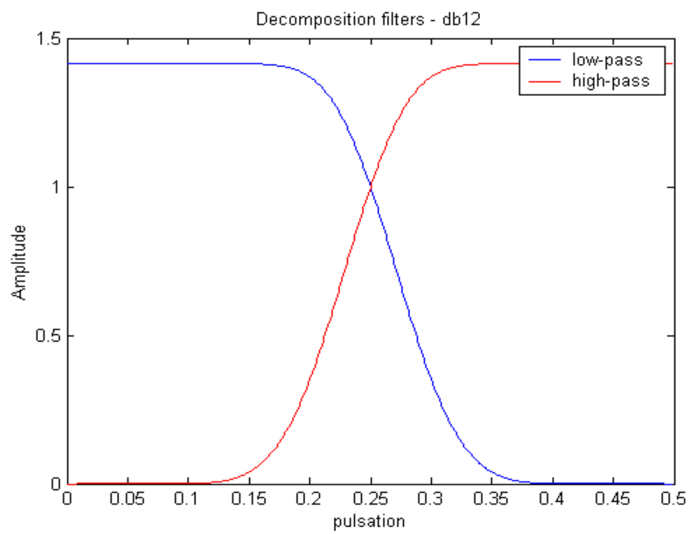
$$\bar{s}^{wy}(z) = G\left(z^M\right)\bar{s}^{we}\left(z^M\right)$$

Nadpróbkowanie:

$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) = \bar{s}^{we}\left(z^M\right)}$$

Schemat filtracji dwukanałowej



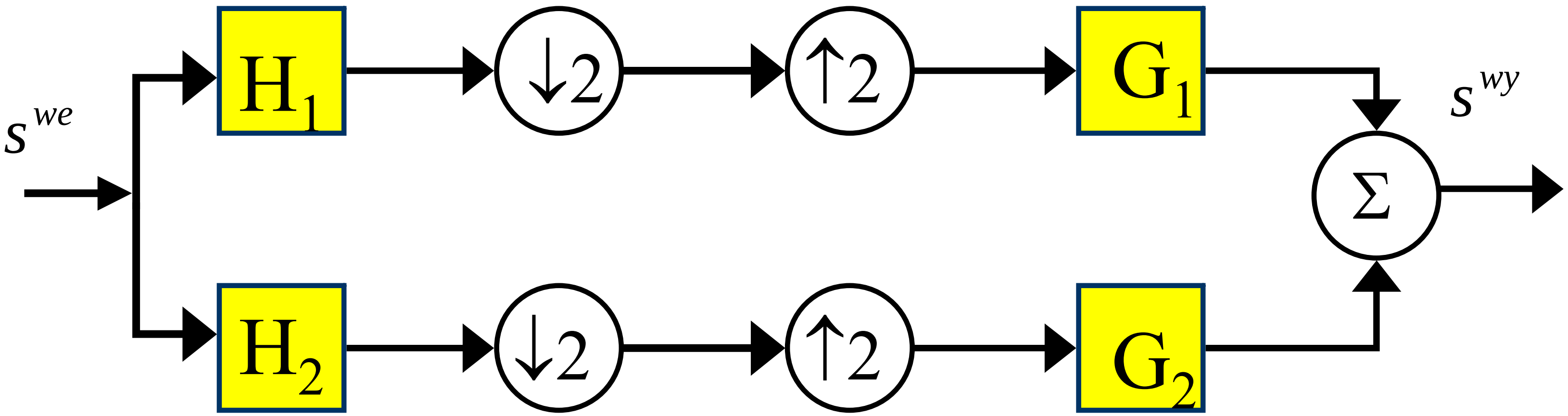


H_1 G_1 filtry dolnoprzepustowe

H_2 G_2 filtry górnoprzepustowe

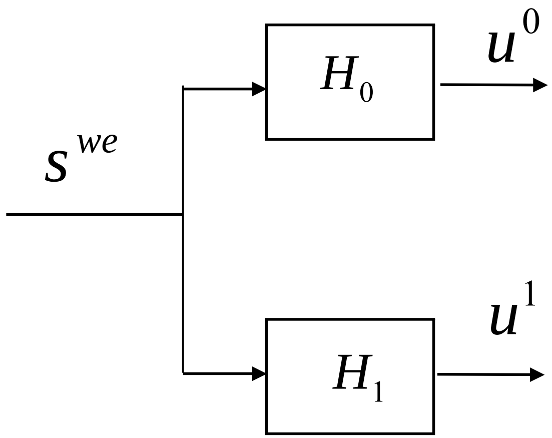
Perfekcyjna rekonstrukcja

(ang. perfect reconstruction)



$$\boxed{\bar{s}^{wy}(z) \overset{df}{=} c z^{-k} \bar{s}^{we}(z)}$$

Model dekompozycji sygnału



$$\begin{cases} \bar{u}^0(z) = H_0(z)\,\bar{s}^{we}(z) \\ \bar{u}^1(z) = H_1(z)\,\bar{s}^{we}(z) \end{cases}$$

Model sekwencji pod- i nadpróbkowania

$$\boxed{s_d^0(n) = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right] s_d(n)}$$

$$\xrightarrow{s_d} \circled{\downarrow 2} \xrightarrow{s_m} \circled{\uparrow 2} \xrightarrow{s_d^0}$$

Mnożąc obustronnie przez z^{-n} otrzymujemy

$$s_d^0(n) z^{-n} = \frac{1}{2}\left[s_d(n) z^{-n} + s_d(n)(-1)^{-n} z^{-n}\right] \quad \text{dla} \quad n \in \Im$$

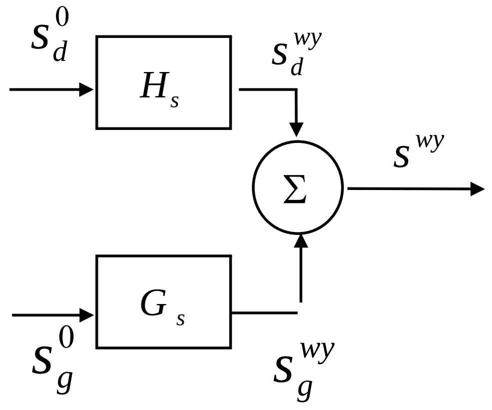
Sumując po wszystkich *n* dostajemy

$$\sum_n s_d^0(n) z^{-n} = \frac{1}{2}\left[\sum_n s_d(n) z^{-n} + \sum_n s_d(n)(-1)^{-n} z^{-n}\right]$$

$$\bar{s}_d^0(z) = \frac{1}{2}\left[\bar{s}_d(z) + \bar{s}_d(-z)\right]$$

Model syntezy sygnału

$$\bar{s}^{wy}(z) = H_s(z)\bar{s}_d^0(z) + G_s(z)\bar{s}_g^0(z)$$



gdzie

$$\begin{cases} \bar{s}_d^0(z) = \frac{1}{2}\left[\bar{s}_d(z) + \bar{s}_d(-z)\right] \\ \bar{s}_g^0(z) = \frac{1}{2}\left[\bar{s}_g(z) + \bar{s}_g(-z)\right] \end{cases}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}H_s(z)\left[\bar{s}_d(z) + \bar{s}_d(-z)\right] + \frac{1}{2}G_s(z)\left[\bar{s}_g(z) + \bar{s}_g(-z)\right]$$

Model całego systemu

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2} H_s(z)\left[H_d(z)\, \bar{s}^{we}(z) + H_d(-z)\, \bar{s}^{we}(-z)\right]$$
$$+ \frac{1}{2} G_s(z)\left[G_d(z)\, \bar{s}^{we}(z) + G_d(-z)\, \bar{s}^{we}(-z)\right]$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\left[H_s(z) H_d(z) + G_s(z) G_d(z)\right]\bar{s}^{we}(z)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[H_s(z) H_d(-z) + G_s(z) G_d(-z)\right]\bar{s}^{we}(-z)$$

W zapisie macierzowym

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_s(z) & G_s(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_d(z) & H_d(-z) \\ G_d(z) & G_d(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}^{we}(z) \\ \bar{s}^{we}(-z) \end{bmatrix}$$

Warunki perfekcyjnej rekonstrukcji

$$\boxed{\overline{s}^{wy}(z) = cz^{-k}\overline{s}^{we}(z)}$$

$$\overline{s}^{wy}(z) = \frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(z) + G_s(z)G_d(z)\right]\overline{s}^{we}(z) + \frac{1}{2}\left[H_s(z)H_d(-z) + G_s(z)G_d(-z)\right]\overline{s}^{we}(-z)$$

$$H_s(z)H_d(-z) + G_s(z)G_d(-z) = 0$$

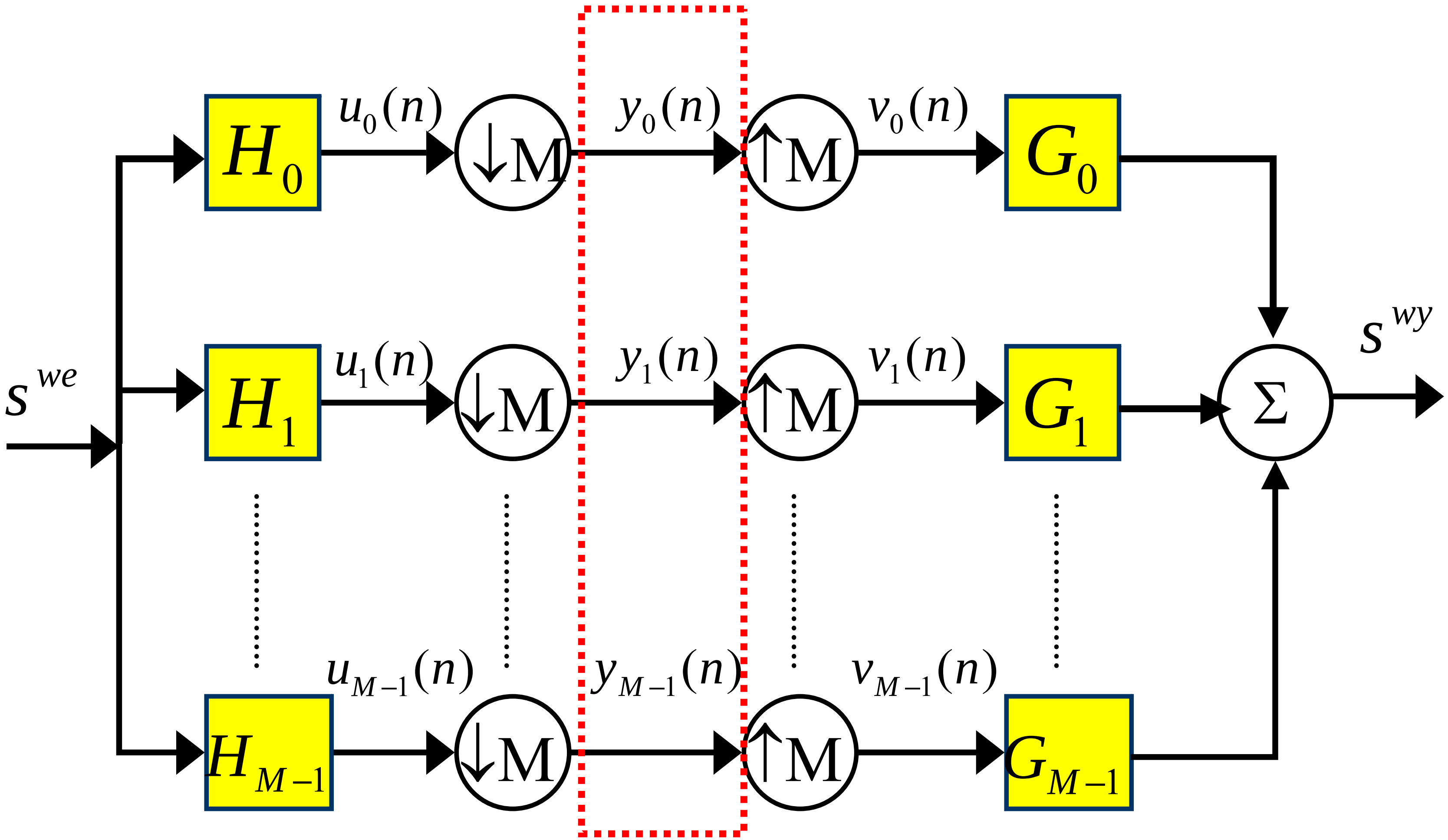
$$H_s(z)H_d(z) + G_s(z)G_d(z) = 2cz^{-k}$$

Perfekcyjna rekonstrukcja przy pomocy filtrów typu FIR

$$H_d(z)G_d(-z) - H_d(-z)G_d(z) = 2z^{-2k-1}$$

$$\begin{bmatrix} H_s(z) & G_s(z) \end{bmatrix} = cz^{-k}\begin{bmatrix} G_d(-z) & -H_d(-z) \end{bmatrix}$$

Rysunek M-kanałowej dekompozycji i syntezy sygnału



Model M-kanałowej dekompozycji sygnału

$$\bar{s}_i(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H_i\left(z^{1/M} w_M^m\right) \bar{s}^{we}\left(z^{1/M} w_M^m\right)$$

$$\underline{\bar{s}}(z) = \frac{1}{M} H\left(z^{1/M}\right) \underline{\bar{s}}^{we}\left(z^{1/M}\right) \qquad w_M = e^{-2\pi j/M}$$

$$\underline{\bar{s}}(z) = \left[\bar{s}_0(z) \quad \bar{s}_1(z) \quad \cdots \quad \bar{s}_{M-1}(z)\right]^T \in \Re^M$$

gdzie

$$\underline{\bar{s}}^{we}(z) = \left[\bar{s}^{we}(z) \quad \bar{s}^{we}(w_M z) \quad \cdots \quad \bar{s}^{we}(w_M^{M-1} z)\right]^T \in \Re^M$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(w_M z) & \cdots & H_0(w_M^{M-1} z) \\ H_1(z) & H_1(w_M z) & \cdots & H_1(w_M^{M-1} z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{M-1}(z) & H_{M-1}(w_M z) & \cdots & H_{M-1}(w_M^{M-1} z) \end{bmatrix} \in \Re^{M \times M}$$

Model matematyczny M-kanałowej syntezy i dekompozycji sygnału

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} G_m(z)\,\bar{s}_m(z^M) = G^T(z)\,\underline{\bar{s}}(z^M)$$

gdzie $G(z) = \left[G_0(z) \quad \cdots \quad G_{M-1}(z)\right] \in \Re^M$

$$\underline{\bar{s}}(z) = \frac{1}{M} H\left(z^{1/M}\right) \underline{\bar{s}}^{we}\left(z^{1/M}\right)$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} G(z)\,H(z)\,\underline{\bar{s}}^{we}(z)$$

Warunek perfekcyjnej rekonstrukcji w M-kanałowym systemie

$$\overline{s}^{wy}(z) = \frac{1}{M} G(z) H(z) \underline{s}^{we}(z)$$

$$\frac{1}{M} G(z) H(z) = \begin{bmatrix} cz^{-k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} G_m(z) H_m(z) = cz^{-k}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} G_m(z) H_m(w_M z) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} G_m(z) H_m(w_M^{M-1} z) = 0$$