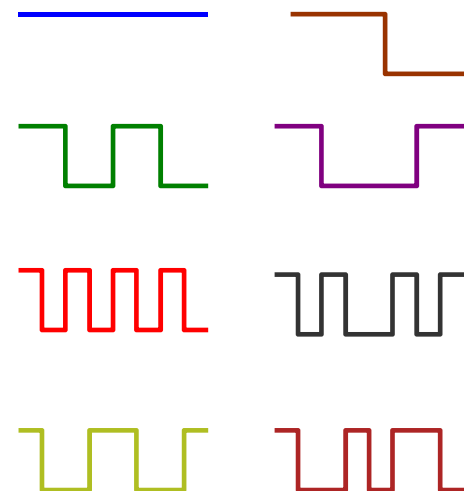
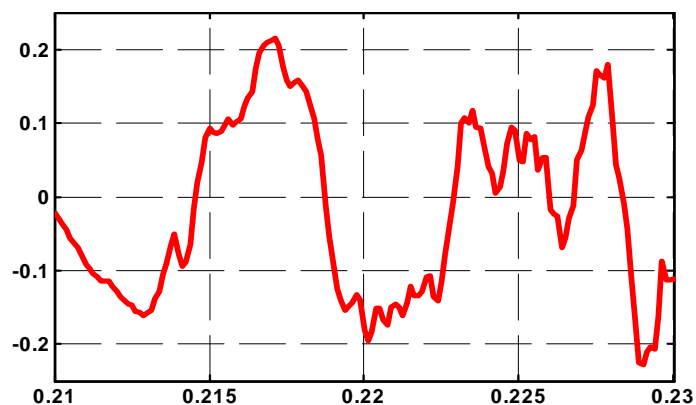


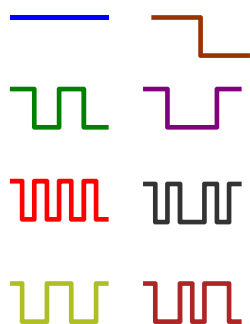
REPREZENTACJA SYGNAŁÓW

Spis treści:

1. Bazy sygnałów.
2. Procedura ortonormalizacyjna.
3. Wielomiany, funkcje Haara i Walsha, funkcje gięte, trygonometryczne.
4. Sygnały dwuargumentowe.

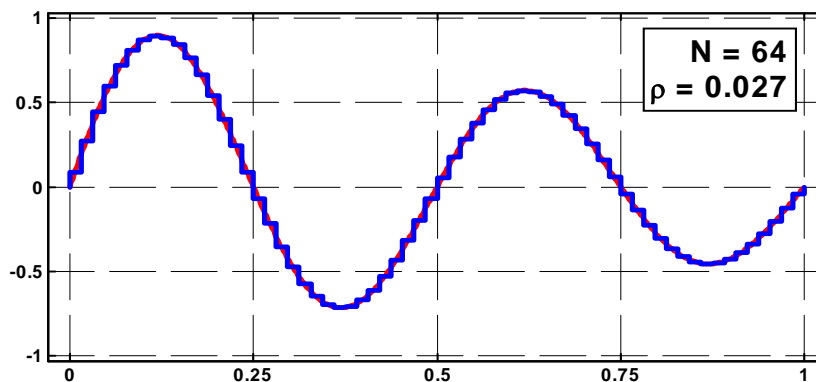
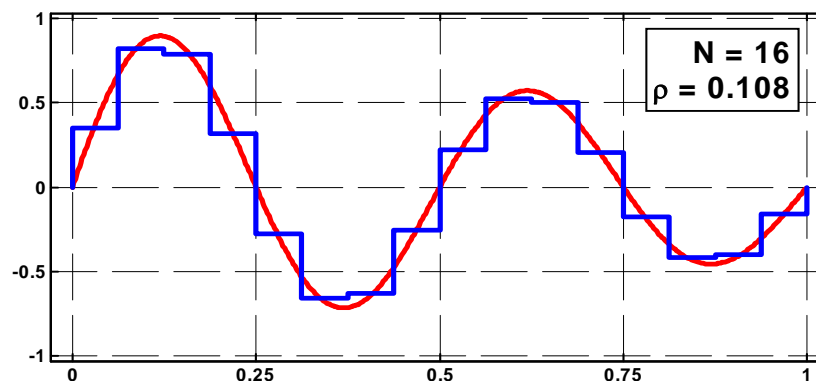
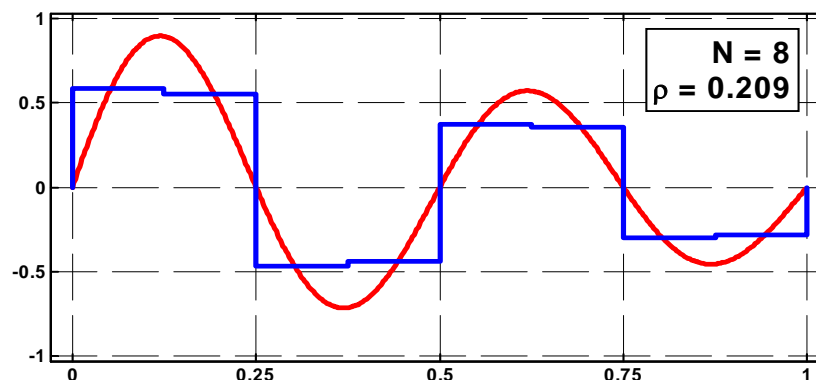


Reprezentacja sygnałami elementarnymi



$$s \approx \sum_{n=1}^N a_n s_n$$

Ciag $\{a_n\}_{n=1}^N$ jest reprezentacją sygnału s .





Liniowa niezależność

Definicja 1.

Elementy s_n są *liniowo niezależne*, gdy z warunku zerowania ich kombinacji liniowej wynikają zerowe wartości współczynników a_n , tzn.

$$\sum_{n=1}^N a_n s_n = \emptyset \Rightarrow \forall_{n=1, \dots, N} a_n = 0$$



Wymiar przestrzeni

Definicja 2.

Jeżeli przestrzeń S zawiera co najwyżej N elementów liniowo niezależnych, to S nazywamy *przestrzenią N -wymiarową* a jej wymiar oznaczamy $\dim S = N$.

$$s = \sum_{n=1}^N a_n s_n$$

$L^2(0, T)$ oraz $C(0, T)$ są nieskończenie wymiarowe



Baza przestrzeni sygnałów

Definicja 3.

Bazą przestrzeni S nazywamy dowolny zbiór

$$\{s_n : s_n \in S; n = 1, \dots, N; \dim S = N\}$$

elementów liniowo niezależnych.

Definicja 4.

Bazę $\{s_n\}_{n=1}^N$ N -wymiarowej przestrzeni unitarnej S nazywamy *ortogonalną*, jeżeli każde dwa jej elementy są do siebie prostopadłe,

tzn. $\langle s_n, s_m \rangle = 0$ dla $\forall n \neq m$



Baza ortonormalna

Definicja 5.

Jeżeli norma każdego elementu bazy jest jednostkowa, tzn.

$$\|s_n\| = 1$$

to *bazę* nazywamy *unormowaną*.

Definicja 6.

Jeżeli elementy bazowe są zarówno ortogonalne jak i unormowane, to *bazę* nazywamy *ortonormalną*.



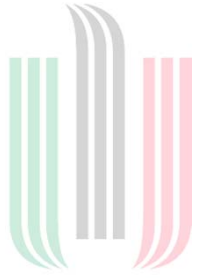
Reprezentacja sygnałów w przestrzeniach skończenie wymiarowych

$$s = \sum_{n=1}^N a_n s_n \in S_N$$

$\{a_n\}_{n=1}^N$ reprezentuje $s \in S_N \subset L^2(0, T)$

$$\langle s, s_m \rangle = \sum_{n=1}^N \langle s_n, s_m \rangle a_n \quad \text{dla } m=1, \dots, N$$

gdzie
$$\langle s, s_m \rangle = \int_0^T s(t) s_m(t) dt$$



Reprezentacja sygnałów w przestrzeniach skończenie wymiarowych

AGH Układ równań $\langle s, s_m \rangle = \sum_{n=1}^N \langle s_n, s_m \rangle a_n$ można zapisać macierzowo

$$b = A a$$

gdzie

$$b = \begin{bmatrix} \langle s, s_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s, s_N \rangle \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \langle s_1, s_1 \rangle & \langle s_2, s_1 \rangle & \cdots & \langle s_N, s_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle s_1, s_N \rangle & \langle s_2, s_N \rangle & \cdots & \langle s_N, s_N \rangle \end{bmatrix}$$

$$a = A^{-1} b$$

gdym $\det A \neq 0$



Procedura ortonormalizacyjna Gram-Schmidta

dowolne $\{s_n\}_{n=1}^N \Rightarrow$ ortonormalne $\{\bar{s}_n\}_{n=1}^N$

$$\bar{s}_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}$$

$v_2 = s_2 - \langle s_2, \bar{s}_1 \rangle \bar{s}_1$ jest ortogonalny do \bar{s}_1 bo $\langle v_2, \bar{s}_1 \rangle = \langle s_2, \bar{s}_1 \rangle - \langle s_2, \bar{s}_1 \rangle \langle \bar{s}_1, \bar{s}_1 \rangle$

$$\bar{s}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

Podobnie $v_3 = s_3 - \langle s_3, \bar{s}_1 \rangle \bar{s}_1 - \langle s_3, \bar{s}_2 \rangle \bar{s}_2$

jest ortogonalny do obu poprzednich wektorów, bo

$$\langle v_3, \bar{s}_1 \rangle = \langle s_3, \bar{s}_1 \rangle - \langle s_3, \bar{s}_1 \rangle \langle \bar{s}_1, \bar{s}_1 \rangle - \langle s_3, \bar{s}_2 \rangle \langle \bar{s}_2, \bar{s}_1 \rangle$$

$$\langle v_3, \bar{s}_2 \rangle = \langle s_3, \bar{s}_2 \rangle - \langle s_3, \bar{s}_1 \rangle \langle \bar{s}_1, \bar{s}_2 \rangle - \langle s_3, \bar{s}_2 \rangle \langle \bar{s}_2, \bar{s}_2 \rangle$$

$$v_n = s_n - \sum_{m=1}^{n-1} \langle s_n, \bar{s}_m \rangle \bar{s}_m$$



Algorytm Grama-Schmidta

1⁰. Dane :

s_1, s_2, \dots, s_N - dowolna baza,

N - ilość elementów bazy.

2⁰. Obliczyć pierwszy element ortonormalnej bazy

$$\bar{s}_1 := \frac{s_1}{\|s_1\|}$$

i podstawić $n:=1$.



C.d algorytmu Grama-Schmidta

3⁰. Powiększyć numer wskaźnika $n:=n+1$ i następnie obliczyć kolejny element

$$v_n := s_n - \sum_{m=1}^{n-1} \langle s_n, \bar{s}_m \rangle \bar{s}_m$$

4⁰. Dokonać normalizacji elementu otrzymanego w poprzednim kroku

$$\bar{s}_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

5⁰. Jeżeli $n < N$ należy przejść do punktu 3⁰. Przeciwny przypadek oznacza zakończenie procedury ortonormalizacyjnej.



Aproksymacja sygnałów w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych

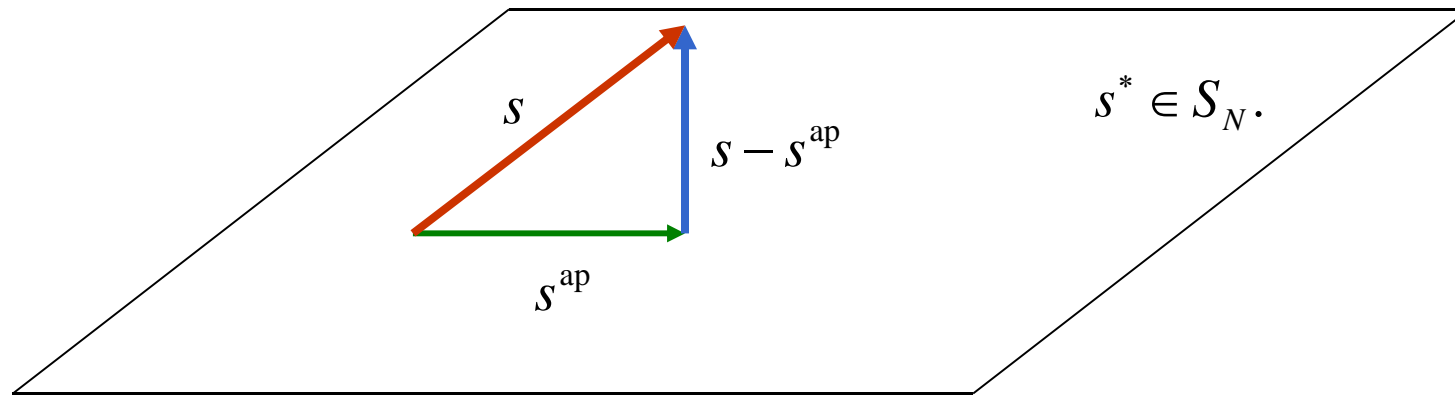
$$s \in \mathcal{S} \quad s^{ap} \in \mathcal{S}_N \subset \mathcal{S}$$

$$s^{ap} = \sum_{n=1}^N a_n s_n$$

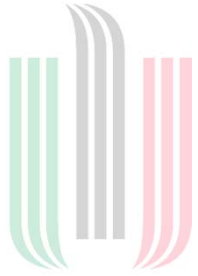
$$\rho(s, s^{ap}) = \min_{a_n} \rho\left(s, \sum_{n=1}^N a_n s_n\right)$$

$$\rho(s, s^{ap}) \leq \rho(s, s^*) \quad \text{dla każdego } s^* \in \mathcal{S}_N$$

Rysunek rzutu ortogonalnego



$$\langle s - s^{ap}, s^* \rangle = 0$$



Twierdzenie o rzucie ortogonalnym

Niech S będzie przestrzenią unitarną, a S_N będzie N -wymiarową podprzestrzenią (tzn. $S_N \subset S$) rozpiętą na ortonormalnej bazie $\{s_n\}_{n=1}^N$. Dla każdego s istnieje jedyny element $s^{ap} \in S_N$ określony wzorem

$$s^{ap} = \sum_{n=1}^N \langle s, s_n \rangle s_n$$

taki, że:

- 1) dla każdego $s^* \in S_N$ spełniona jest nierówność $\rho(s, s^{ap}) \leq \rho(s, s^*)$,
- 2) element $s - s^{ap}$ jest ortogonalny do podprzestrzeni S_N , tzn.

$$\langle s - s^{ap}, s^* \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } s^* \in S_N.$$

Równość Parsevala

ortogonalność
bazy



baza
unormowana



$$\|s\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n s_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|s_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \|a\|_{l^2}^2$$

Równość Parsevala

$$\|s\|_{L^2} = \|a\|_{l^2}$$

gdzie $\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^T s^2(t) dt}$

$$\|a\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$



Początek przykładu

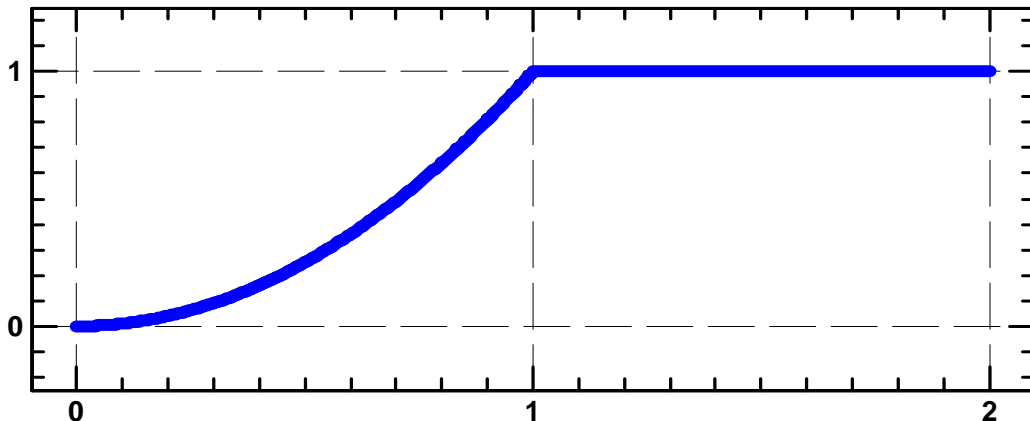
W przestrzeni $L^2(0,2)$ znaleźć
najlepszą aproksymację sygnału

$$s(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{dla } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

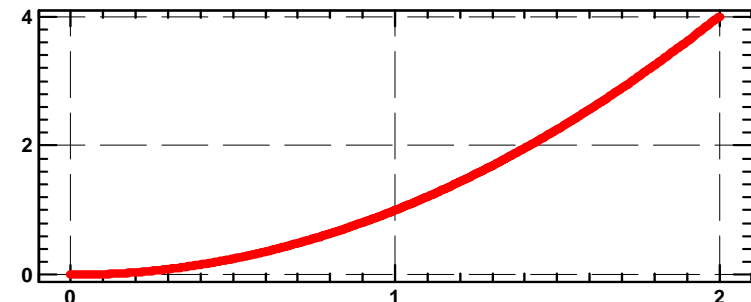
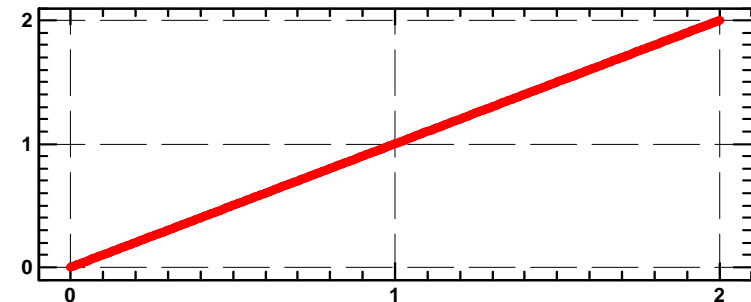
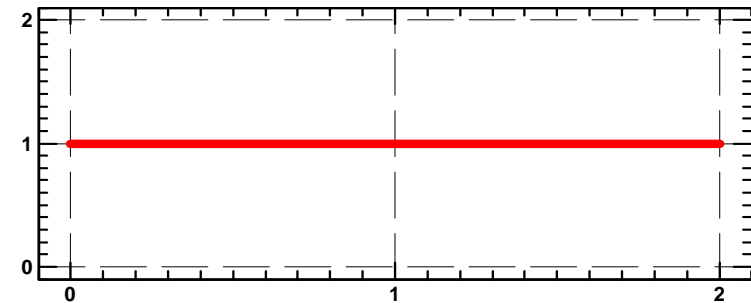
przy pomocy funkcji:

$$s_1(t) = 1, \quad s_2(t) = t, \quad s_3(t) = t^2.$$

Sygnał



Funkcje aproksymujące





Kontynuacja przykładu

Kwadrat odległości

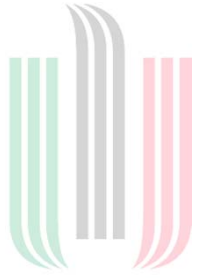
$$Q = \rho^2(s, \tilde{s}) = \int_0^1 (t^2 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2)^2 dt + \int_1^2 (1 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2)^2 dt$$

Takie a_1, a_2, a_3 aby funkcjonal Q osiągał wartość minimalną.

$$\frac{\partial \rho^2(s, \tilde{s})}{\partial a_1} = -2 \int_0^1 (t^2 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) dt - 2 \int_1^2 (1 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) dt$$

$$\frac{\partial \rho^2(s, \tilde{s})}{\partial a_2} = -2 \int_0^1 (t^2 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) t dt - 2 \int_1^2 (1 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) t dt$$

$$\frac{\partial \rho^2(s, \tilde{s})}{\partial a_3} = -2 \int_0^1 (t^2 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) t^2 dt - 2 \int_1^2 (1 - a_1 - a_2 t - a_3 t^2) t^2 dt$$



AGH

Zakończenie przykładu

Po obliczeniu całek, przyrównujemy do zera powyższe pochodne i otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 4/3 & 2 & 16/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/4 \\ 19/15 \end{bmatrix},$$

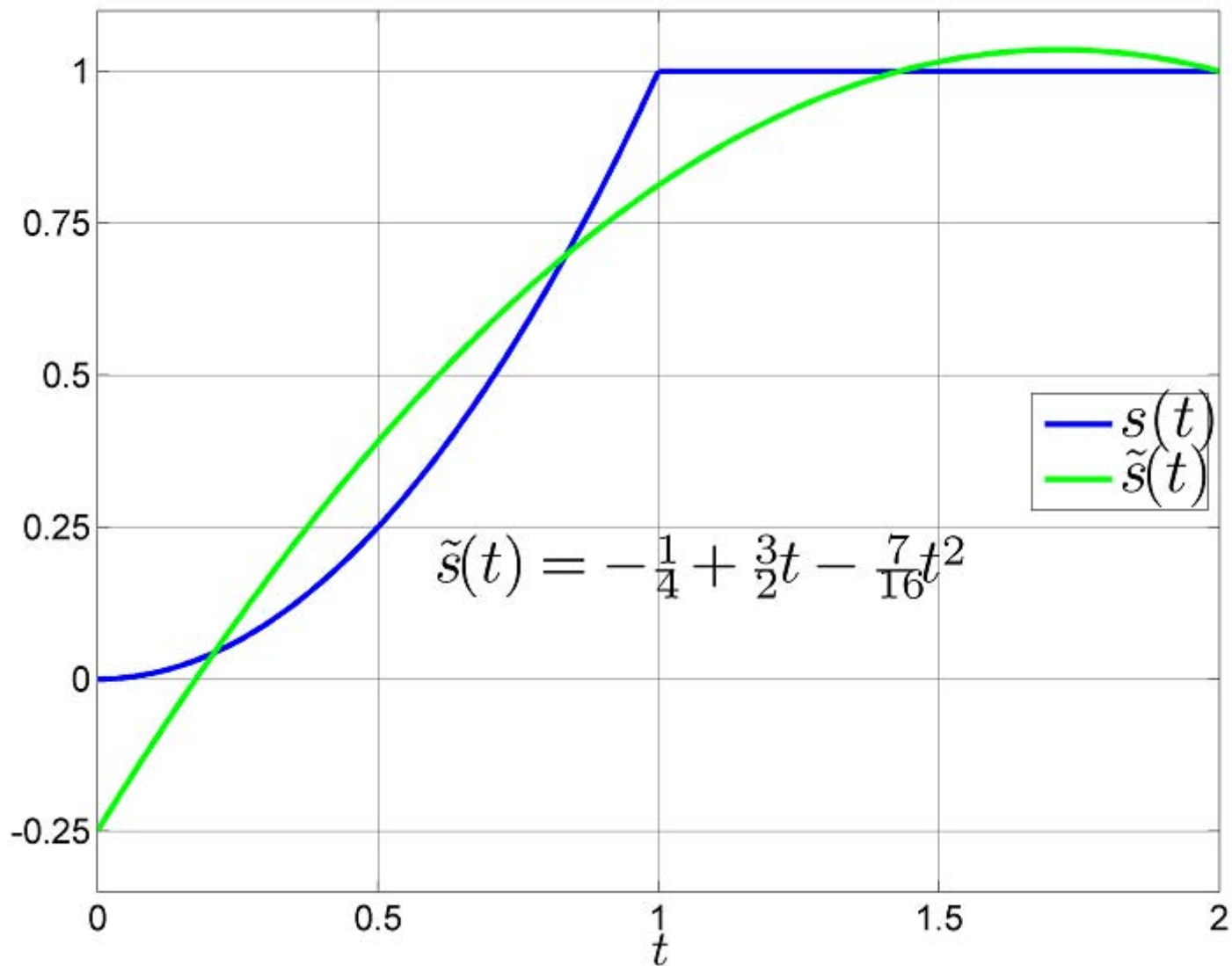
który ma rozwiązanie:

$$a_1 = -0,25 \quad a_2 = 1,5 \quad a_3 = -0,4375.$$

Oznacza to, że aproksymacja zadanego sygnału ma postać

$$\tilde{s}(t) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{7}{16}t^2.$$

Ilustracja rozwiązania





Wielomiany ortogonalne

Wielomiany ortogonalne na odcinku $[0,1]$ generowane są wzorem

$$s_{n+1}(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - t)^n \quad n = 0,1,2,\dots$$

i spełniają wzór rekurencyjny

$$(n-1)s_n(t) = (2n-3)(2t-1)s_{n-1}(t) - (n-2)s_{n-2}(t).$$



Przykład wielomianów ortogonalnych

Siedem pierwszych wielomianów ortogonalnych na odcinku $[0,1]$

$$s_1(t) = 1$$

$$s_2(t) = 2t - 1$$

$$s_3(t) = 6t^2 - 6t + 1$$

$$s_4(t) = 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1$$

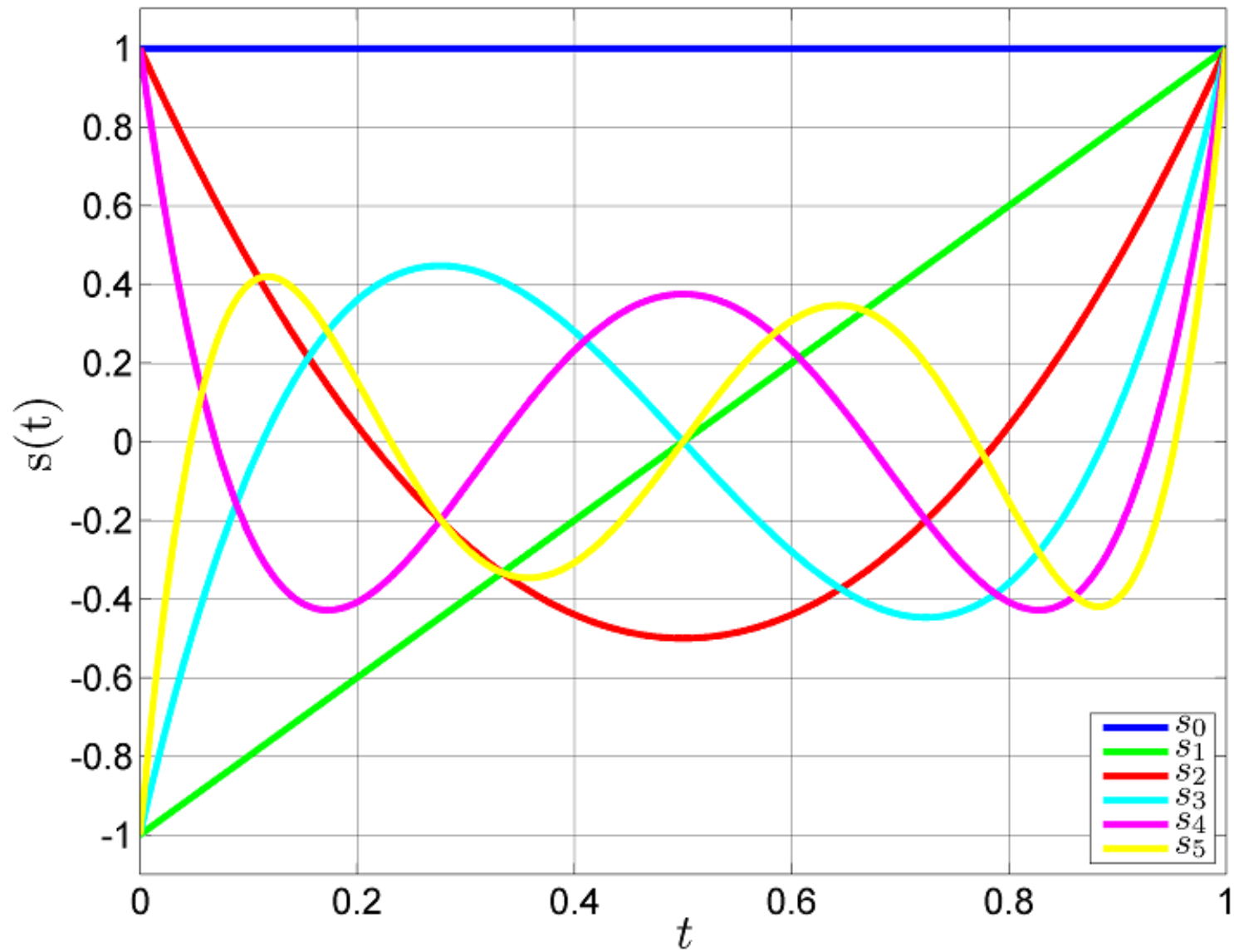
$$s_5(t) = 70t^4 - 140t^3 + 90t^2 - 20t + 1$$

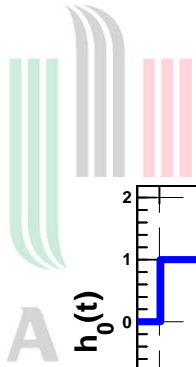
$$s_6(t) = 252t^5 - 630t^4 + 560t^3 - 210t^2 + 30t - 1$$

$$s_7(t) = 924t^6 - 2772t^5 + 3150t^4 - 1680t^3 + 420t^2 - 42t + 1$$

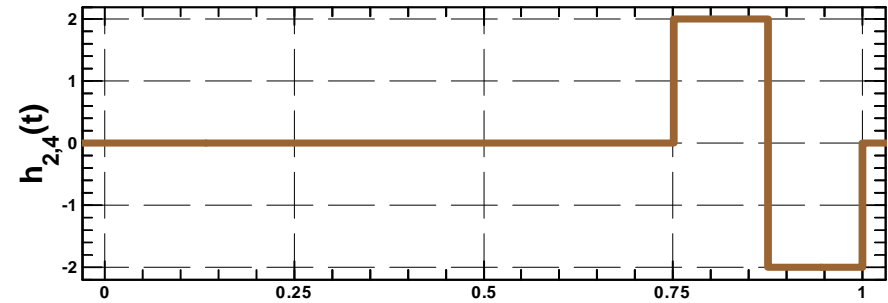
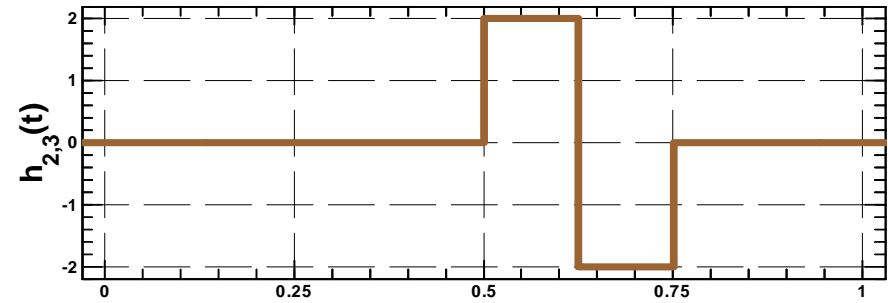
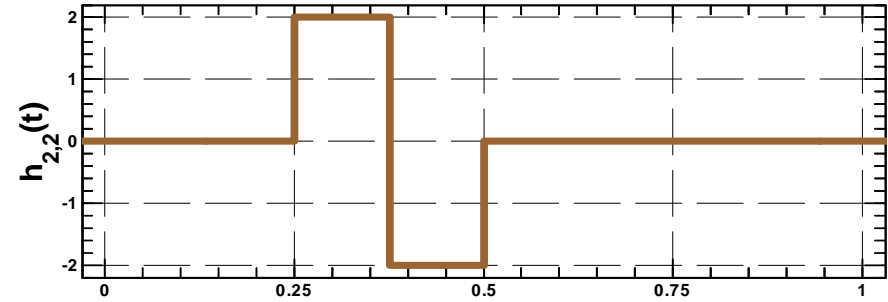
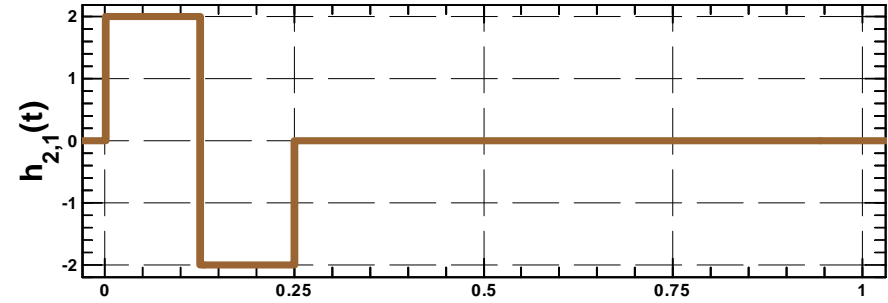
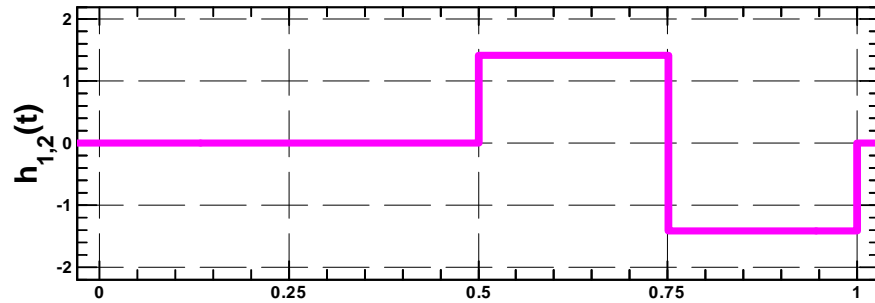
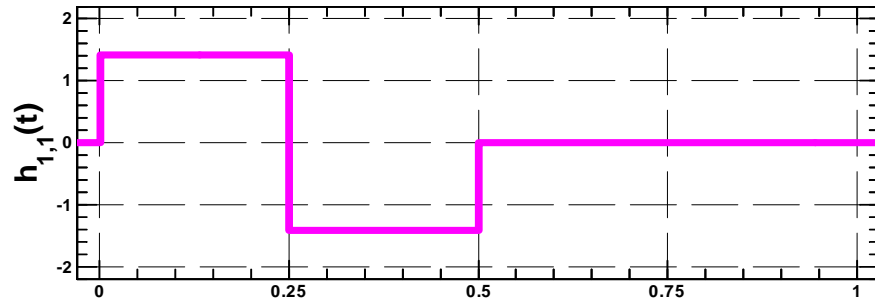
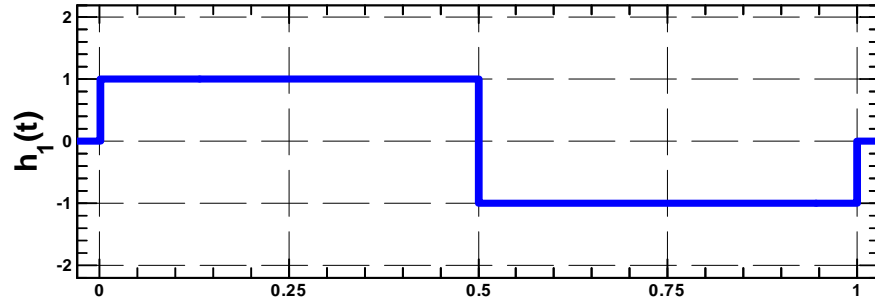
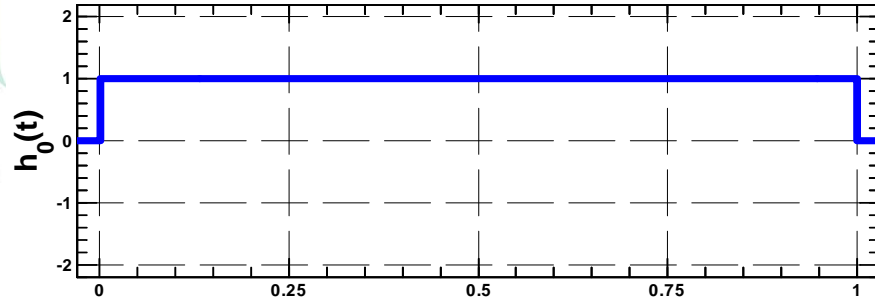
$$\|s_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

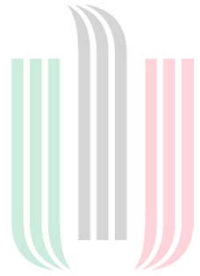
Wykresy wielomianów ortogonalnych





Wykresy funkcji Haara





Funkcje Haara

AGH

Funkcje ortonormalne w $L^2(0,1)$

$r=0,1,2,\dots$ numer grupy

m numer kolejnym funkcji w ramach danej grupy

$$1 \leq m \leq 2^r$$

$$h_0(t) = 1 \quad \text{dla} \quad t \in [0,1]$$



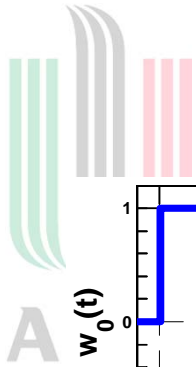
Haar 1910 rok

Definicja funkcji Haara

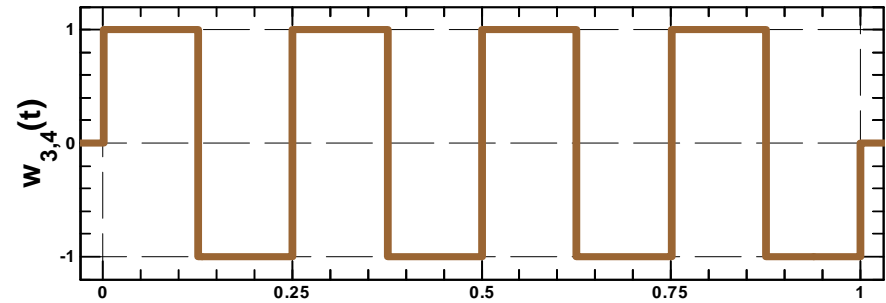
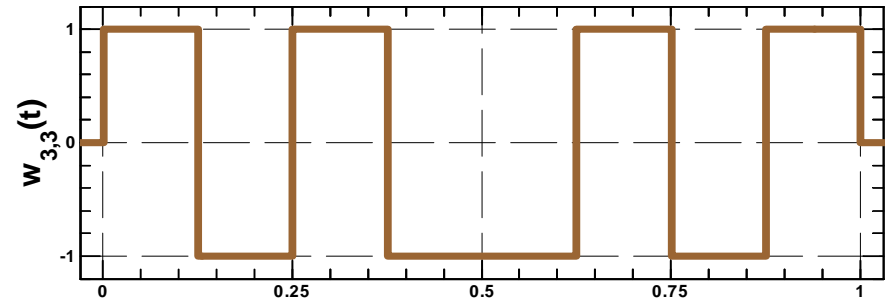
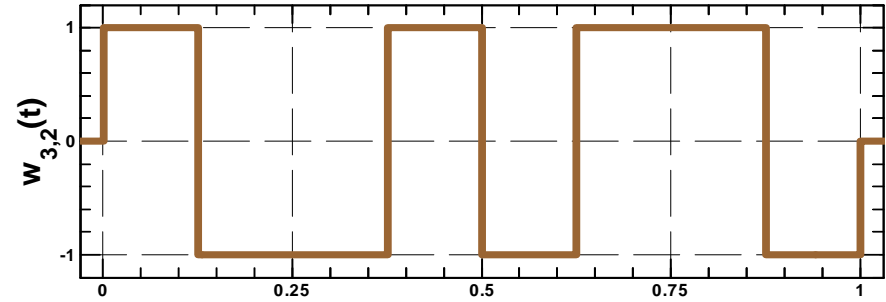
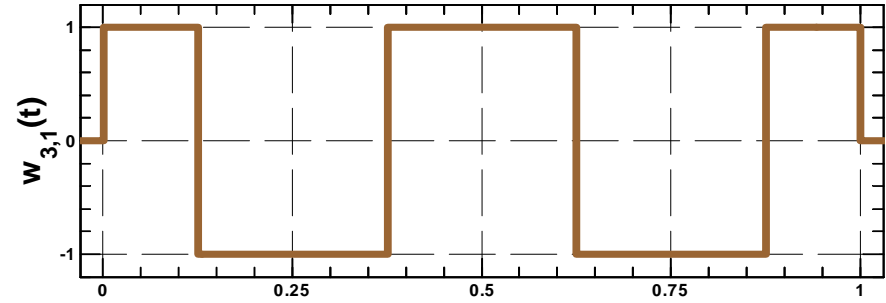
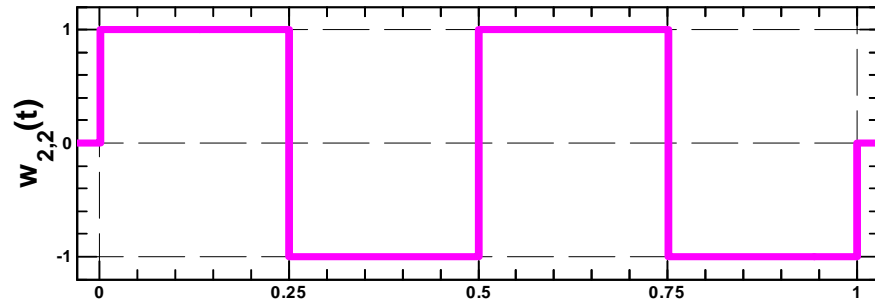
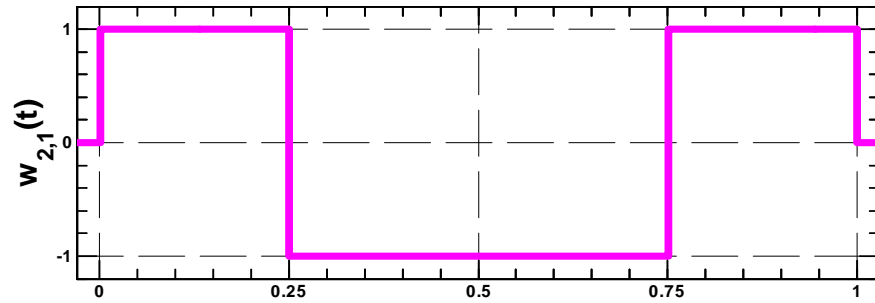
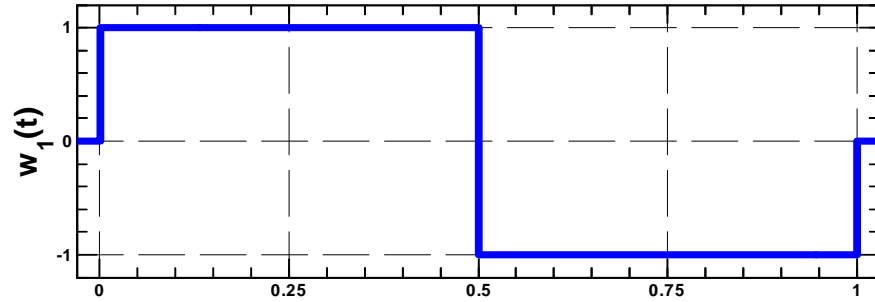
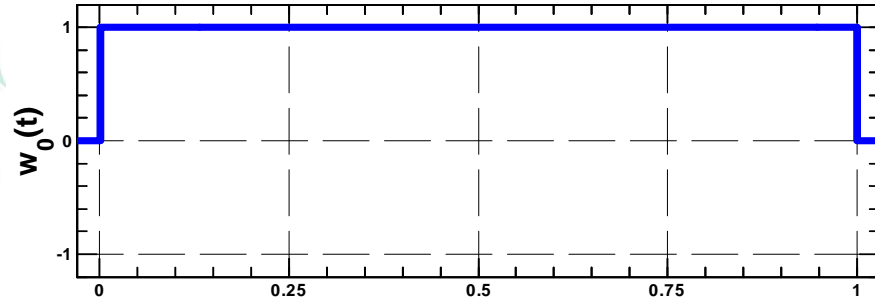
$$h_n(t) = h_{r,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^r} & \text{dla } \frac{m-1}{2^r} < t < \frac{2m-1}{2^{r+1}} \\ -\sqrt{2^r} & \text{dla } \frac{2m-1}{2^{r+1}} < t < \frac{m}{2^r} \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \in [0,1]. \end{cases}$$

r	m	n
0	1	1
1	1, 2	2, 3
2	1, 2, 3, 4	4, 5, 6, 7
3	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

gdzie $n=2^r+m-1$



Wykresy funkcji Walsha





Funkcje Walsha

Tworzą bazę ortonormalną w $L^2(0,1)$

$$w_0(t) = 1 \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1$$

$$w_1(t) = \begin{cases} w_0(2t) & \text{dla } 0 \leq t < 1/2 \\ -w_0(2t-1) & \text{dla } 1/2 < t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{dla } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

$r = 1, 2, \dots$ numer grupy

$m = 1, \dots, 2^{r-1}$ kolejność w ramach m -tej grupy



Iteracyjna generacja funkcji Walsha

$$w_{m+1,2k-1}(t) = \begin{cases} w_{m,k}(2t) & \text{dla } 0 < t < 1/2 \\ (-1)^{k+1} w_{m,k}(2t-1) & \text{dla } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

$$w_{m+1,2k}(t) = \begin{cases} w_{m,k}(2t) & \text{dla } 0 < t < 1/2 \\ (-1)^k w_{m,k}(2t-1) & \text{dla } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$



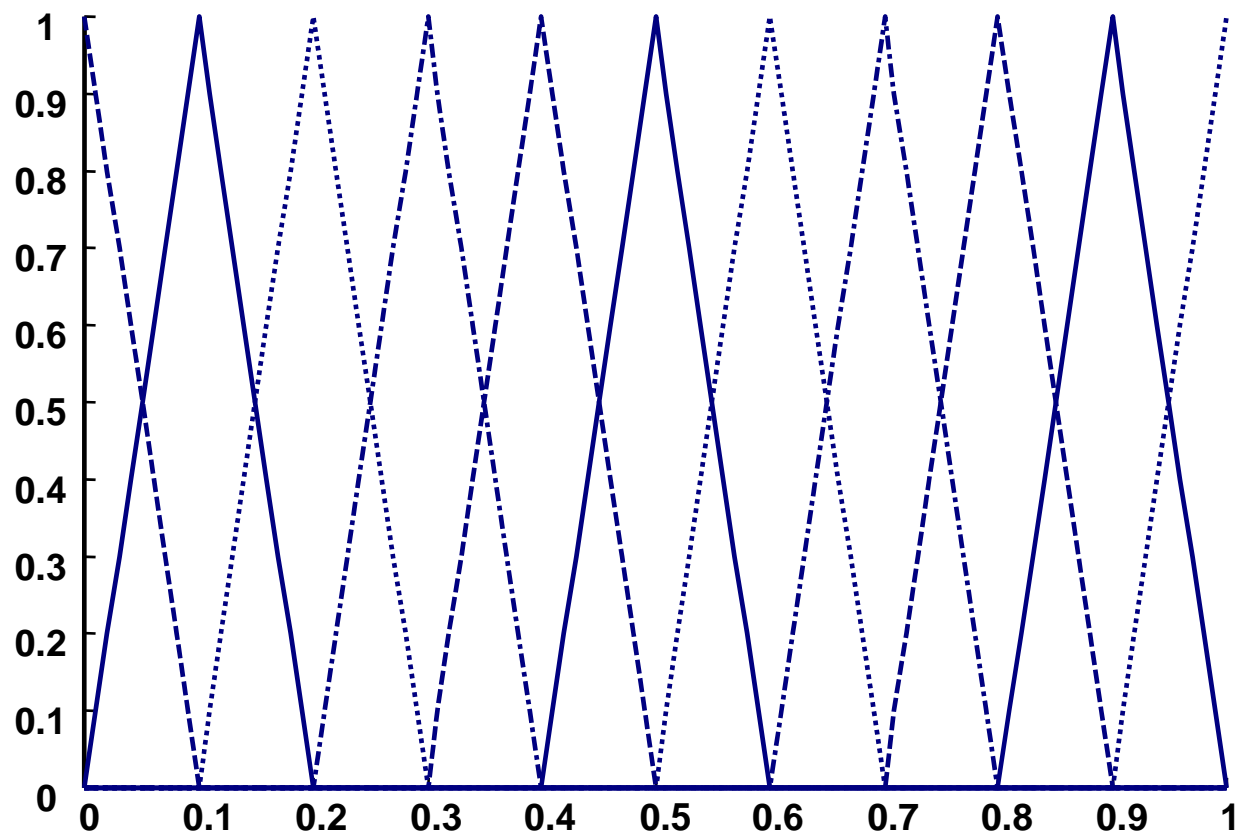
Numeracja funkcji Walsha

$$w_n(t) = w_{r,m}(t)$$

gdzie $n=2^{r-1}+m-1$

r	m	n
1	1	1
2	1, 2	2, 3
3	1, 2, 3, 4	4, 5, 6, 7
4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Wykresy funkcji giętych



Przykład jedenastu funkcji giętych pierwszego stopnia



Funkcje gięte pierwszego stopnia

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |j-1-t(n-1)| \geq 1 \\ 1 - |j-1-t(n-1)| & \text{gdy } |j-1-t(n-1)| < 1, \end{cases}$$

gdzie $n \geq 3$ jest założoną ilością funkcji dla odcinka $[0,1]$



Iloczyny skalarne funkcji giętych pierwszego stopnia

$$a_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 2h/3 & \text{gdy } 1 \neq i = j \neq n \\ h/3 & \text{gdy } i = j = 1 \text{ lub } i = j = n \\ h/6 & \text{gdy } i = j + 1 \text{ lub } i = j - 1 \\ 0 & \text{dla } i, j \text{ pozostałych} \end{cases}$$

Gdzie $h = 1/(n-1)$ jest długością nośników funkcji giętych o numerach $j = 2, \dots, n-1$.



Szybka generacja elementów macierzy odwrotnej do trójprzekątniowej

Macierz A jest trójprzekątniowa, ale macierz do niej odwrotna jest macierzą pełną z elementami o wartościach

$$a_{i,j}^{\text{odw}} = \frac{\mu_i \nu_j}{2\nu_1 + \nu_2}$$

gdzie

$$\mu_i = \frac{(\sqrt{3} - 2)^{i-1} + (-2 - \sqrt{3})^{i-1}}{2}$$

$$\nu_j = \frac{(\sqrt{3} - 2)^{n-j} + (-2 - \sqrt{3})^{n-j}}{2}$$



Macierz odwrotna do macierzy iloczynów skalarnych

$$A^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 34,6410 & -9,2820 & 2,4871 & -0,6664 & 0,1786 & -0,0478 & 0,0128 & -0,0034 & 0,0009 & -0,0003 & 0,0001 \\ -9,2820 & 18,5641 & -4,9742 & 1,3328 & -0,3571 & 0,0957 & -0,0256 & 0,0069 & -0,0019 & 0,0005 & -0,0003 \\ 2,4871 & -4,9742 & 17,4098 & -4,6649 & 1,2500 & -0,3349 & 0,0897 & -0,0241 & 0,0065 & -0,0019 & 0,0009 \\ -0,6664 & 1,3328 & -4,6649 & 17,3269 & -4,6427 & 1,2440 & -0,333 & 0,8935 & -0,0241 & 0,0069 & -0,0034 \\ 0,1786 & -0,3571 & 1,2500 & -4,6427 & 17,3210 & -4,6411 & 1,2436 & -0,3333 & 0,0897 & -0,0256 & 0,0128 \\ -0,0478 & 0,0957 & -0,3349 & 1,2440 & -4,6411 & 17,3206 & -4,6411 & 1,2440 & -0,3349 & 0,0957 & -0,0478 \\ 0,0128 & -0,0256 & 0,0897 & -0,3333 & 1,2436 & -4,6411 & 17,3210 & -4,6427 & 1,2500 & -0,3571 & 0,1786 \\ -0,0034 & 0,0069 & -0,0241 & 0,0893 & -0,3333 & 1,2440 & -4,6427 & 17,3269 & -4,6649 & 1,3328 & -0,6664 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0065 & -0,0241 & 0,0897 & -0,3349 & 1,2500 & -4,6649 & 17,4098 & -4,9742 & 2,4871 \\ -0,0003 & 0,0005 & -0,0019 & 0,0069 & -0,0256 & 0,0957 & -0,3571 & 1,3328 & -4,9742 & 18,5641 & -9,2820 \\ -0,0003 & -0,0003 & 0,0009 & -0,0034 & 0,0128 & -0,0478 & 0,1786 & -0,6664 & 2,4871 & -9,2820 & 34,6410 \end{bmatrix}$$



Funkcje trygonometryczne

Ortogonalna baza w $L^2(0, T)$ oraz baza dla funkcji okresowych
w $C(-\infty, \infty)$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t / T) + b_n \sin(2\pi n t / T)]$$

$$\int_0^T s(t) dt = \int_0^T a_0 dt + 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Współczynniki szeregu trygonometrycznego

$$\int_0^T s(t) \cos(2\pi n t / T) dt = a_n \int_0^T \cos^2(2\pi n t / T) dt$$

$$\int_0^T \cos^2(2\pi n t / T) dt \equiv \int_0^T \frac{1 + \cos(4\pi n t / T)}{2} dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{T}{8n\pi} \sin(4\pi n t / T) \right) \Big|_0^T = \frac{T}{2}$$

otrzymujemy
$$\int_0^T s(t) \cos(2\pi n t / T) dt = a_n \frac{T}{2}$$

a zatem
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi n t / T) dt$$

podobnie
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi n t / T) dt$$



Warunki Dirichleta

Jeżeli funkcja $s(t)$ spełnia warunki:

1. jest bezwzględnie całkowalna, tzn.

$$\int_0^T |s(t)| dt < \infty,$$

2. w przedziale jednego okresu ma skończoną liczbę lokalnych maksimów i minimów,
3. w przedziale jednego okresu ma skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, tzn. skończone są granice lewostronna $\lim_{t \rightarrow t_-} s(t) < \infty$ i prawostronna $\lim_{t \rightarrow t_+} s(t) < \infty$,

to $s(t)$ ma reprezentację w postaci szeregu Fouriera.



Współrzędne biegunowe

Przesunięcie
fazowe

$$\varphi_n = \begin{cases} 0,5\pi \operatorname{sign}(b_n) & \text{gdy } a_n = 0 \\ 0,5\pi - 0,5\pi \operatorname{sign}(a_n) & \text{gdy } a_n \neq 0 \text{ i } b_n = 0 \\ \pi - \pi \operatorname{sign}(b_n) + \operatorname{arctg}(b_n/a_n) & \text{gdy } a_n > 0 \text{ i } b_n \neq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(b_n/a_n) & \text{gdy } a_n < 0 \text{ i } b_n \neq 0 \end{cases}$$

amplituda $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(b_n/a_n)$

wtedy
$$\begin{cases} a_n = c_n \cos(\varphi_n) \\ b_n = c_n \sin(\varphi_n) \end{cases}$$



Szereg trygonometryczny w postaci biegunowej

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(\varphi_n) \cos(2\pi n t / T) + c_n \sin(\varphi_n) \sin(2\pi n t / T))$$

Korzystając z tożsamości

$$\cos(\varphi_n) \cos(2\pi n t / T) + \sin(\varphi_n) \sin(2\pi n t / T) = \cos(2\pi n t / T - \varphi_n)$$

otrzymujemy

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n t / T - \varphi_n)$$

Funkcje trygonometryczne w postaci eksponentalnej

$$\cos(2\pi nt / T) = \frac{e^{2\pi jnt/T} + e^{-2\pi jnt/T}}{2} \quad \sin(2\pi nt / T) = \frac{e^{2\pi jnt/T} - e^{-2\pi jnt/T}}{2j}$$

gdzie $j^2 = -1$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{2\pi jnt/T} + e^{-2\pi jnt/T}}{2} + b_n \frac{e^{2\pi jnt/T} - e^{-2\pi jnt/T}}{2j} \right)$$

Oznaczając

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & \text{dla } n < 0 \\ a_0 & \text{dla } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

otrzymujemy zespolony szereg Fouriera $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{2\pi jnt/T}$

ponieważ $e^{2\pi jnt/T} = \cos(2\pi nt / T) + j \sin(2\pi nt / T)$

to $s_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2\pi jnt/T} dt$



Zależności między współczynnikami dla różnych reprezentacji trygonometrycznych

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan(b_n/a_n)$$

$$\begin{cases} a_n = c_n \cos(\varphi_n) \\ b_n = c_n \sin(\varphi_n) \end{cases}$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t / T) + b_n \sin(2\pi n t / T)]$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n t / T - \varphi_n)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{2\pi j n t / T}$$

$$a_n = s_n + s_{-n}$$

$$b_n = j(s_n - s_{-n})$$

Reprezentacja sygnałów dwuwymiarowych

$$s \in L^2([0, X] \times [0, Y], \mathbb{R})$$

czyli

$$\int_0^X \int_0^Y s^2(x, y) dy dx < \infty$$

$$s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n(x, y)$$





Współczynniki ortonormalnej reprezentacji sygnałów dwuwymiarowych

$$\int_0^X \int_0^Y s_n(x, y) s_m(x, y) dy dx = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m. \end{cases}$$

$$\langle s, s_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \langle s_m, s_n \rangle$$

gdzie $\langle s, s_n \rangle = \int_0^X \int_0^Y s(x, y) s_n(x, y) dy dx$

$$a_n = \langle s, s_n \rangle$$

Rozdzielanie zmiennych reprezentacji sygnałów dwuwymiarowych

$$s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \varphi_n(x) \psi_m(y)$$

$$\int_0^X \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases}$$

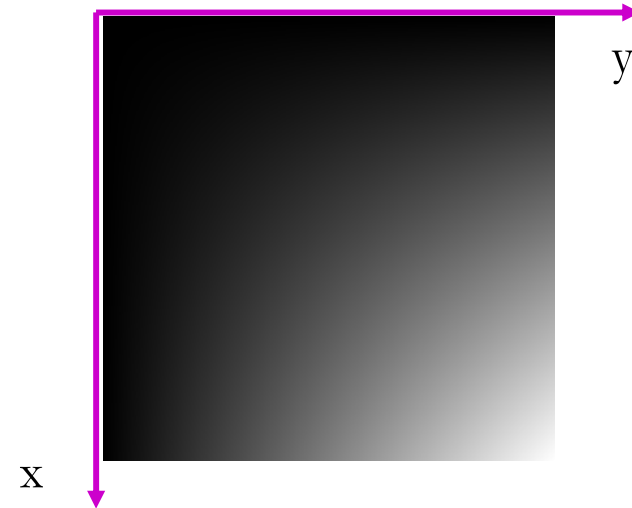
$$\int_0^Y \psi_n(y) \psi_m(y) dy = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m. \end{cases}$$

$$\int_0^X \varphi_i(x) \int_0^Y s(x, y) \psi_j(y) dy dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \int_0^X \varphi_i(x) \varphi_n(x) dx \int_0^Y \psi_j(y) \psi_m(y) dy$$

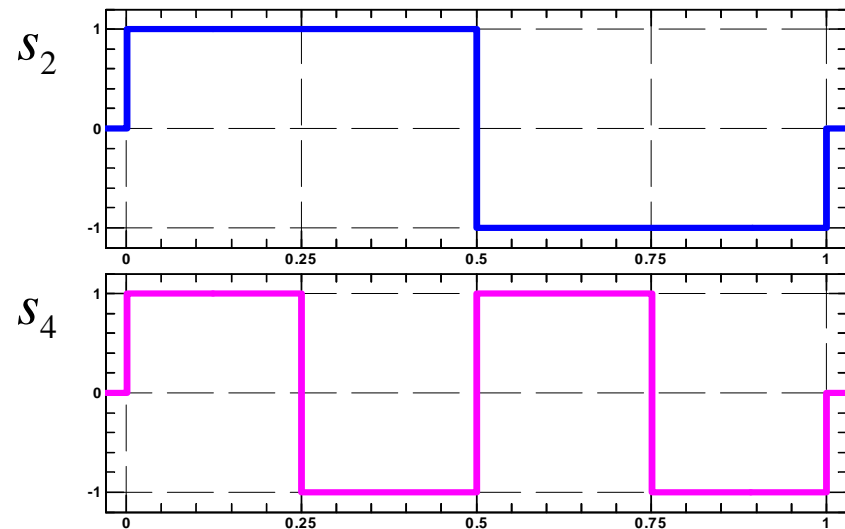
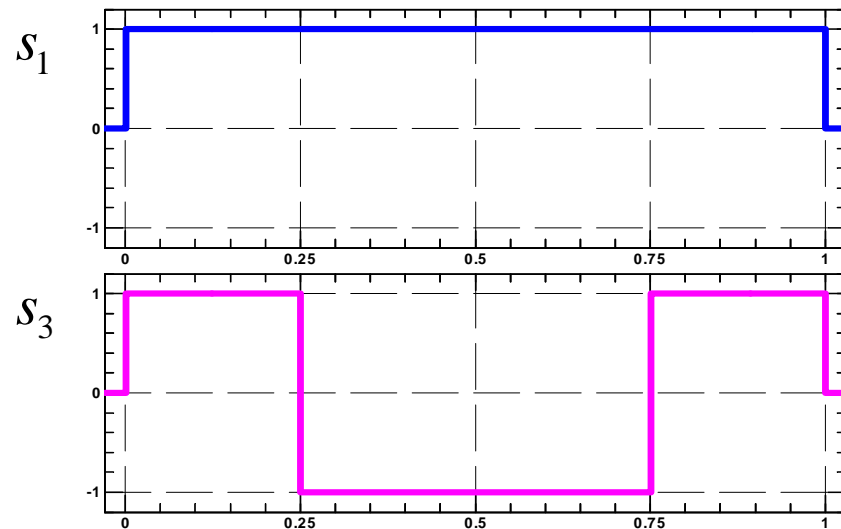
$$a_{n,m} = \int_0^X \varphi_n(x) \int_0^Y s(x, y) \psi_m(y) dy dx$$

Przykład reprezentacji obrazu przy pomocy funkcji Walsh

Obraz $s(x,y)=2xy-1$

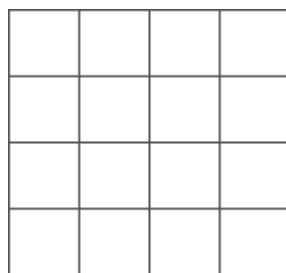


Aproksymować przy pomocy czterech pierwszych funkcji Walsh:

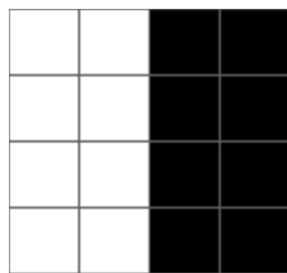


Wybrane obrazy elementarne

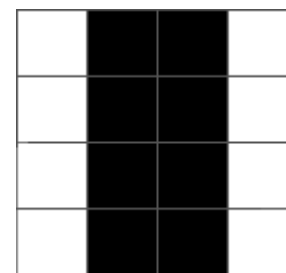
Szesnaście obrazów elementarnych $s_{n,m}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_m(y)$



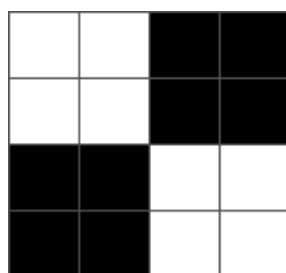
$s_{1,1}$



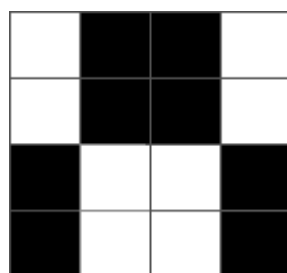
$s_{1,2}$



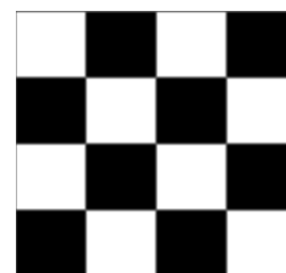
$s_{1,3}$



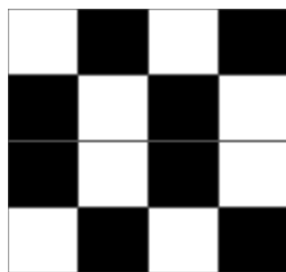
$s_{2,2}$



$s_{2,3}$



$s_{3,3}$



$s_{4,3}$

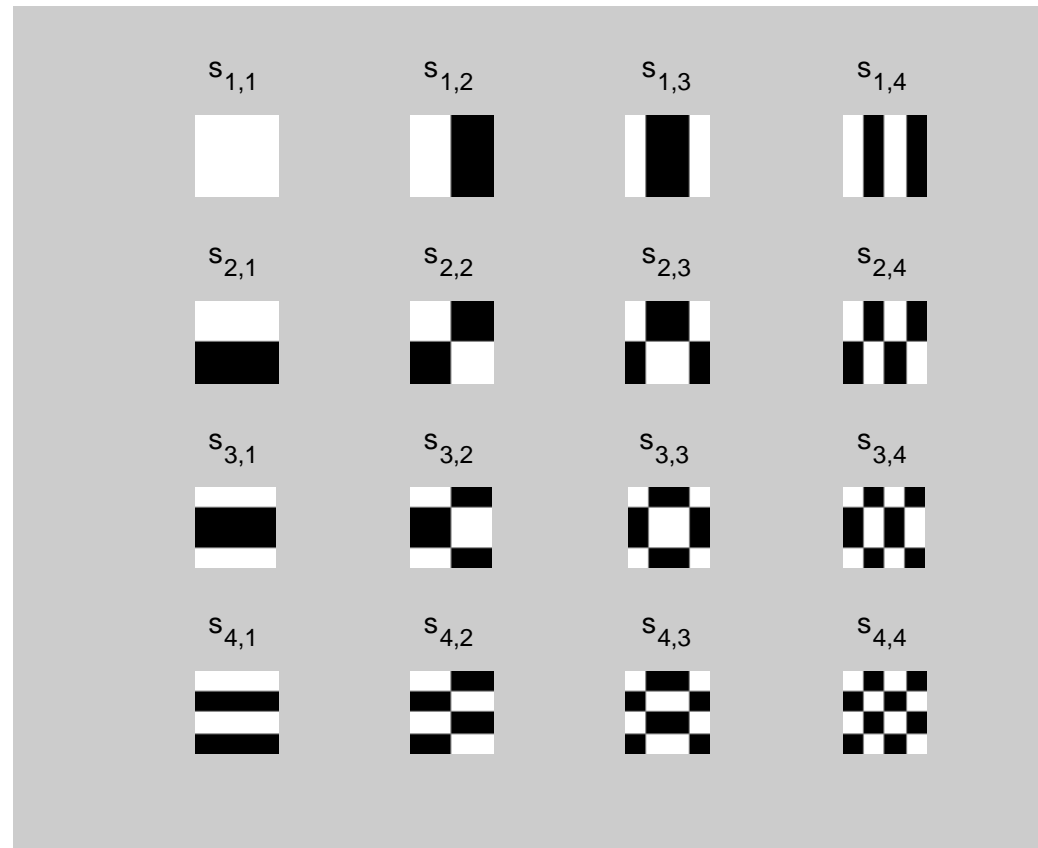
Kolor biały oznacza wartość 1

Kolor czarny to wartość -1 !



Wybrane obrazy elementarne

Szesnaście obrazów elementarnych $s_{n,m}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_m(y)$





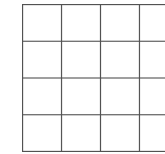
Ciąg dalszy przykładu

Aproksymacja obrazu

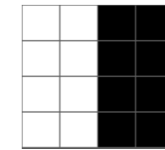
$$s(x, y) \approx \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 a_{n,m} s_n(x) s_m(y)$$

Współczynniki aproksymacji

$$a_{1,1} = \int_0^1 \int_0^1 (2xy - 1) dx dy = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 y \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \quad \text{dla}$$



$$a_{1,2} = \int_0^1 \int_0^{0,5} (2xy - 1) dy dx - \int_0^1 \int_{0,5}^1 (2xy - 1) dy dx = -\frac{1}{4} \quad \text{dla}$$



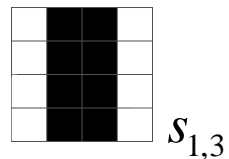
Symetria obrazu, tzn. $s(x, y) = s(y, x)$ powoduje symetrię

współczynników, tzn. $a_{n,m} = a_{m,n}$

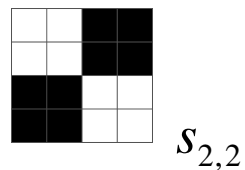
$$a_{1,2} = a_{2,1} = -\frac{1}{4}$$

C.d. przykładu

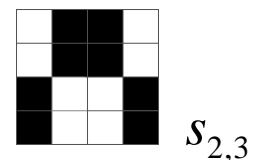
$$a_{1,3} = a_{3,1} = 0$$



$$a_{1,4} = a_{4,1} = -\frac{1}{8}$$

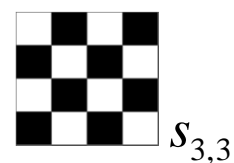
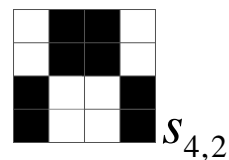


$$a_{2,2} = \frac{1}{8}$$



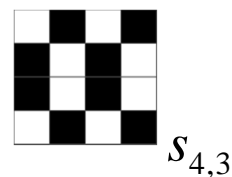
$$a_{2,3} = a_{3,2} = 0$$

$$a_{2,4} = a_{4,2} = \frac{1}{16}$$



$$a_{3,3} = 0$$

$$a_{3,4} = a_{4,3} = 0$$



$$a_{4,4} = \frac{1}{32}$$



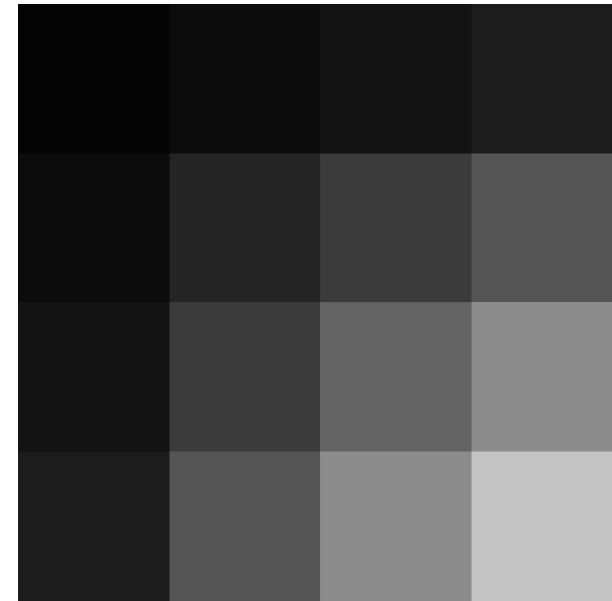
C.d. przykładu

Obliczone współczynniki możemy zestawić w postaci symetrycznej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

$$-s = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -31 & -29 & -27 & -25 \\ -29 & -23 & -17 & -11 \\ -27 & -17 & -7 & 3 \\ -25 & -11 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Ilustracja przykładu

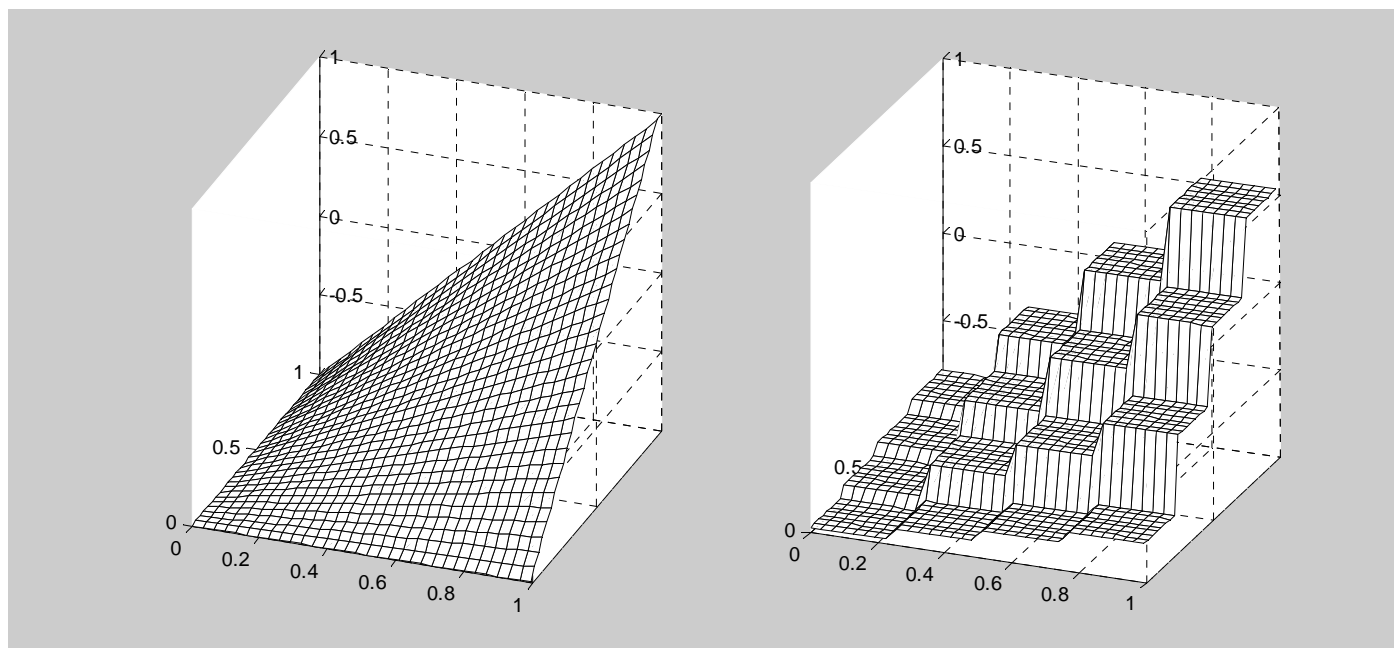


$$s(x, y) = 2xy - 1$$

$$\tilde{s} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -31 & -29 & -27 & -25 \\ -29 & -23 & -17 & -11 \\ -27 & -17 & -7 & 3 \\ -25 & -11 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Obraz oryginalny (z lewej) i jego aproksymacja (z prawej) utworzona przy pomocy funkcji Walsh, niby szesnastu ale w praktyce tylko dziewięciu

Ilustracja przykładu



$$s(x, y) = 2xy - 1$$

$$s = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -31 & -29 & -27 & -25 \\ -29 & -23 & -17 & -11 \\ -27 & -17 & -11 & 3 \\ -25 & -11 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Obraz oryginalny (z lewej) i jego aproksymacja (z prawej) utworzona przy pomocy funkcji Walsh, niby szesnastu ale w praktyce tylko dziewięciu