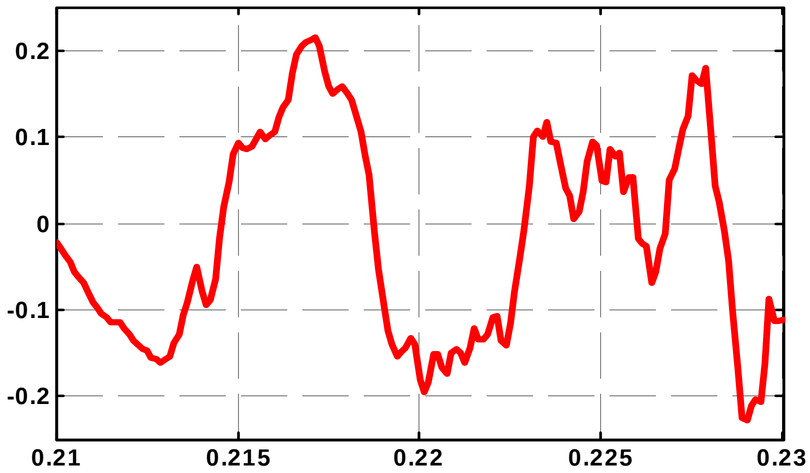
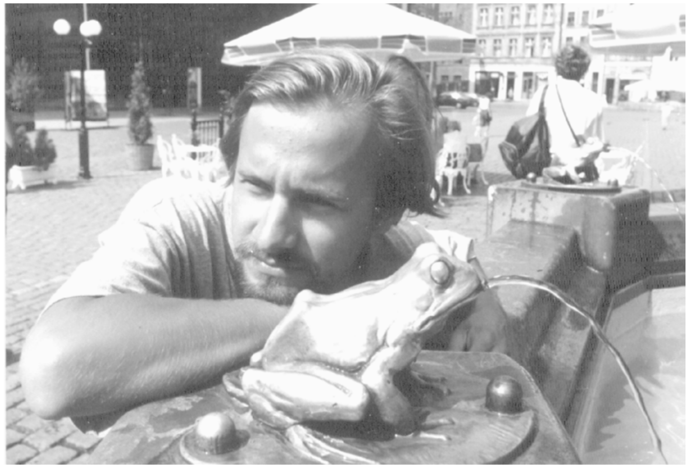
PRZESTRZENIE SYGNAŁÓW





Spis treści

1. Przestrzenie metryczne – odległość miedzy sygnałami
2. Przestrzenie unormowane – moc sygnału
3. Przestrzenie unitarne – iloczyn skalarny
4. Związki pomiędzy przestrzeniami

Definicja przestrzeni metrycznej

Zbiór S nazywamy *przestrzenią metryczną*, jeżeli każdej parze elementów $s_1, s_2 \in S$ przyporządkowana jest liczba nieujemna $\rho(s_1, s_2)$ w taki sposób, że spełnione są następujące warunki zwane aksjomatami metryki:

1. $\rho(s_1, s_2) = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2$
2. $\rho(s_1, s_2) = \rho(s_2, s_1)$
3. $\rho(s_1, s_2) + \rho(s_2, s_3) \geq \rho(s_1, s_3)$

Przykłady przestrzeni metrycznych sygnałów analogowych 1-D

$L^p(0,T) \Leftrightarrow \int_0^T |s(t)|^p \, dt < \infty$

$1 \le p \le \infty \qquad \rho_{L^p}(s_1, s_2) = \left(\int_0^T |s_1(t) - s_2(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$

$L^2(0,T) \qquad \rho_{L^2}(s_1, s_2) = \sqrt{\int_0^T |s_1(t) - s_2(t)|^2 \, dt}$

$L^2(\mathbf{R}) \qquad \rho_{L^2}(s_1, s_2) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t) - s_2(t)|^2 \, dt}$

$L^1(-\infty, +\infty) \qquad \rho_{L^1}(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t) - s_2(t)| \, dt$

$C(0,T) \qquad \rho_C(s_1, s_2) = \max_{0 \le t \le T} |s_1(t) - s_2(t)|$

Przykład odległości między sygnałami

Dane są dwa sygnały :

$$s_1(t) = \sin(t) \quad \text{oraz} \quad s_2(t) = \cos(t)$$

Jaka jest między nimi odległość

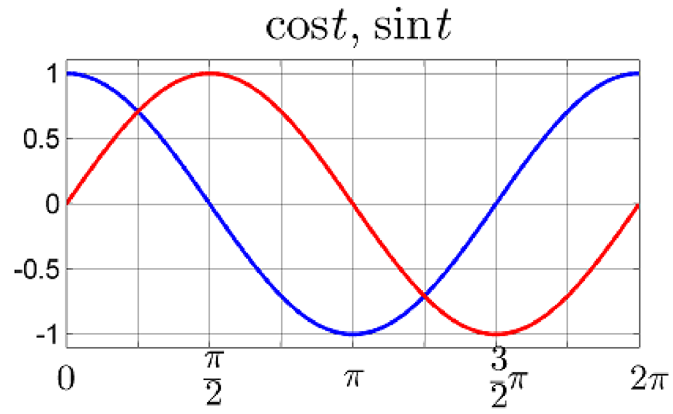
w przestrzeniach $L^2(0,2\pi)$ i $C(0, 2\pi)$?

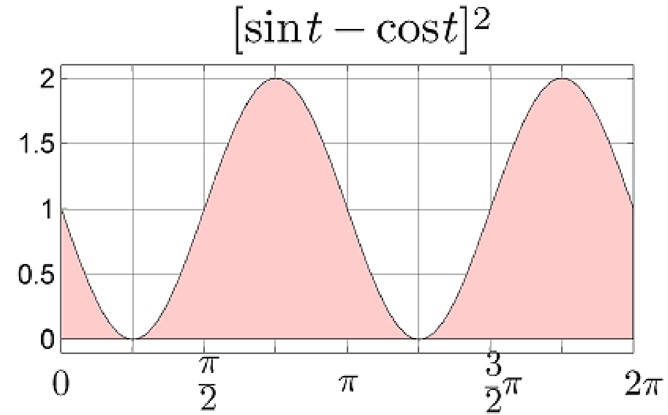
$$\rho_{L^2}(s_1, s_2) = \sqrt{\int_0^{2\pi} [\sin(t) - \cos(t)]^2 dt} = \sqrt{2\pi}$$

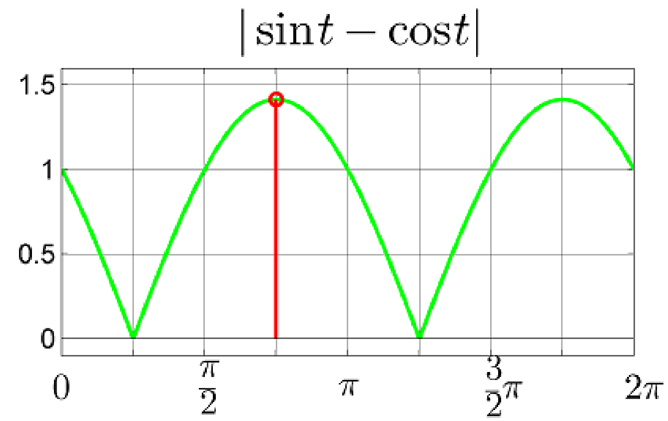
$$\rho_C(s_1, s_2) = \max_{0 \le t \le 2\pi} |\sin(t) - \cos(t)|$$

$$\frac{d(\sin(t) - \cos(t))}{dt} \equiv \cos(t) + \sin(t)$$

$$tg(t) = -1 \Rightarrow t = \tfrac{3}{4}\pi \Rightarrow \rho_C(s_1, s_2) = \sqrt{2}$$







Przykłady przestrzeni metrycznych obrazów analogowych

$\mathbf{L}^2([0,X]\times[0,Y])$

$$\rho_{L^2}(s_1,s_2)=\sqrt{\int_0^Y\int_0^X\left|s_1(x,y)-s_2(x,y)\right|^2 dx\,dy}$$

$L^2(\mathbf{R}^2)$

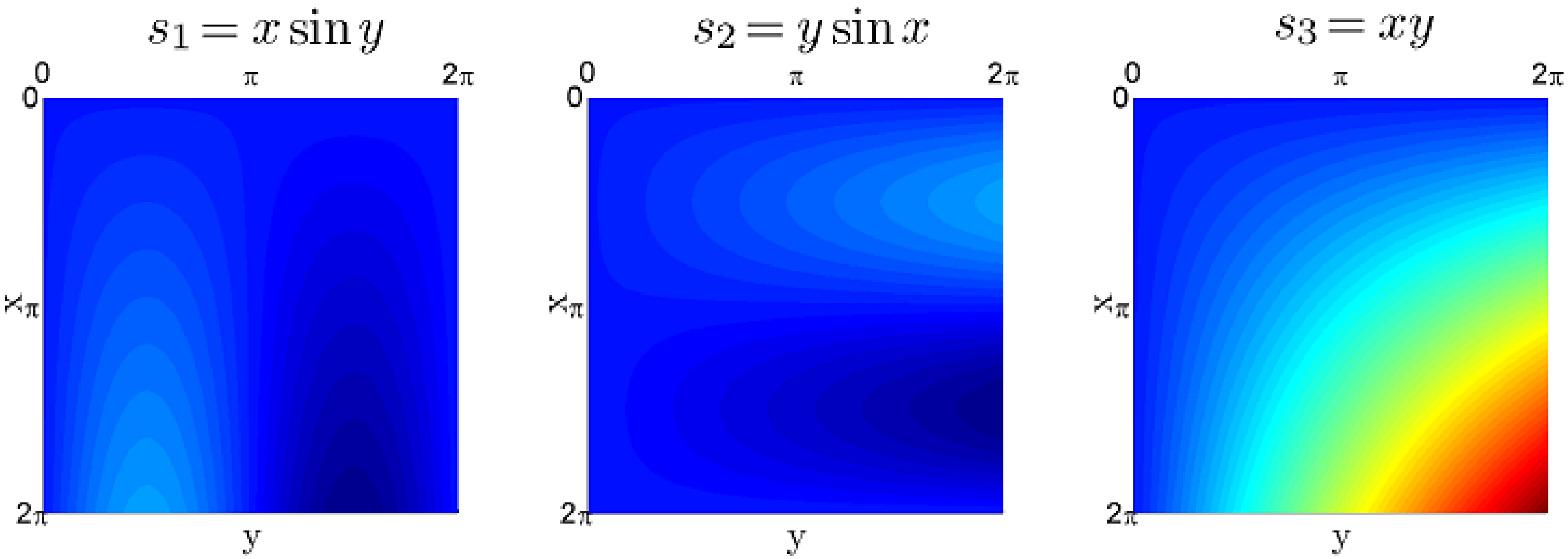
$$\rho_{L^2}(s_1,s_2)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|s_1(x,y)-s_2(x,y)\right|^2 dx\,dy}$$

$C([0,X]\times[0,Y])$

$$\rho_C(s_1,s_2)=\max_{\substack{0\le x\le X\\0\le y\le Y}}\left|s_1(x,y)-s_2(x,y)\right|$$

Przykład odległości między obrazami

Czy obraz $s_1(x,y) = x\sin(y)$ jest bliższy obrazowi $s_2(x,y) = y\sin(x)$ czy obrazowi $s_3(x,y) = xy$ w przestrzeni $L^2([0,2\pi]x[0,2\pi])$?



Obraz z lewej jest bliższy obrazowi centralnemu niż obrazowi z prawej strony

$$\rho_{L^2}(s_1,s_2) = \sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x\sin(y) - y\sin(x)\right)^2 dx\,dy} = 2\sqrt{2}\pi$$

$$\rho_{L^2}(s_1,s_2) < \rho_{L^2}(s_1,s_3)$$

$$\rho_{L^2}(s_1,s_3) = \sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[x\sin(y) - xy\right]^2 dx\,dy} = 2\pi^2\sqrt{\frac{10}{3}+\frac{16}{9}\pi^2}$$

Przykłady przestrzeni metrycznych sygnałów dyskretnych 1-D

$s = [s(0), s(1), \dots]$ $\qquad$ $\sum_n |s(n)|^p < \infty$

l^p $\qquad$ $1 \le p \le \infty$ $\qquad$ $\rho_{l^p}(s_1, s_2) = \left(\sum_n |s_1(n) - s_2(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

l^2 $\qquad$ $s_1, s_2 \in l^2$ $\qquad$ $\rho_{l^2}(s_1, s_2) = \sqrt{\sum_n |s_1(n) - s_2(n)|^2}$

l^∞ $\qquad$ $\rho_{l^\infty}(s_1, s_2) = \max_n |s_1(n) - s_2(n)|$

Przykłady przestrzeni metrycznych sygnałów dyskretnych 2-D

l^1

$$\rho_{l^1}(s_1, s_2) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \left| s_1(m,n) - s_2(m,n) \right|$$

l^2

$$\rho_{l^2}(s_1, s_2) = \sqrt{\sum_{m} \sum_{n} \left| s_1(m,n) - s_2(m,n) \right|^2}$$

l^∞

$$\rho_{l^\infty} = \max_{m,n} \left| s_1(m,n) - s_2(m,n) \right|$$

Definicja przestrzeni unormowanej

Zbiór S nazywamy *przestrzenią unormowaną* jeżeli każdemu jej elementowi $s \in S$, przyporządkujemy liczbę nieujemną $\|s\|$ w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

1. $\|s\| = 0 \Leftrightarrow s = \varnothing$
2. $\|\lambda s\| = |\lambda| \|s\|$ gdzie $\lambda \in \mathbf{R}$
3. $\|s_1 + s_2\| \le \|s_1\| + \|s_2\|$

Przykłady przestrzeni unormowanych sygnałów analogowych

$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^T |s(t)|^2 \, dt}$$

$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt}$$

$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^Y \int_0^X |s(x,y)|^2 \, dx\, dy}$$

$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(x,y)|^2 \, dx\, dy}$$

$$\|s\|_C = \max_t |s(t)|$$

$$\|s\|_C = \max_{x,y} |s(x,y)|$$

Norma sygnału sinusoidalnego

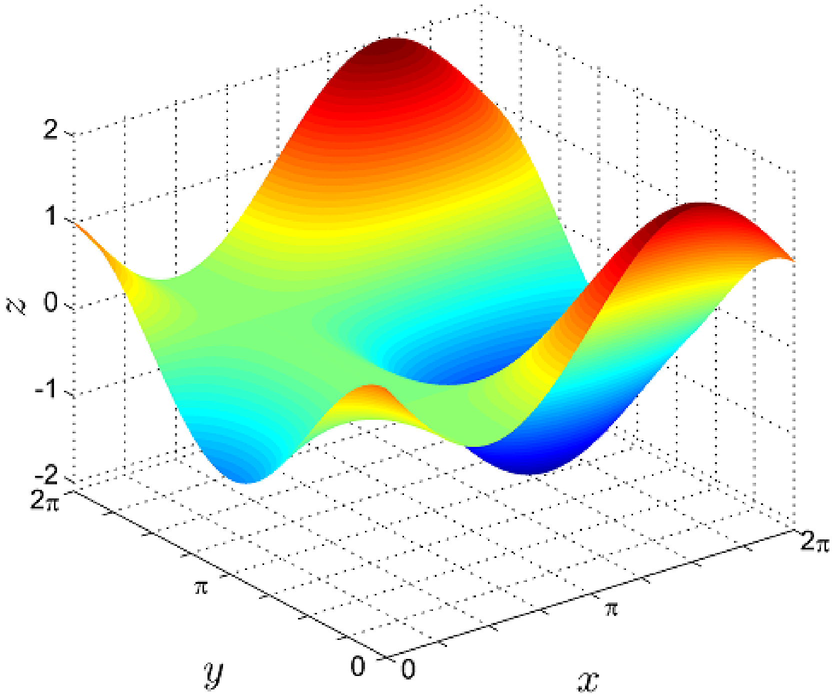
Jakie są normy sygnału $s(t) = \sin(t)$ w przestrzeniach $L^2(0,2\pi)$ i $C(0,2\pi)$?

$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt} = \sqrt{\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|s\|_C = \max_{0 \le t \le 2\pi} |\sin(t)| = 1$$

Norma sygnału analogowego 2-D

Czy norma sygnału $s(x,y)=[1-\sin(x)]\cos(y)$ w przestrzeni $L^2([0,2\pi]x[0,2\pi])$ jest taka sama jak w przestrzeni $C([0,2\pi]x[0,2\pi])$?



$$\|s\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[1-\sin(x)]^2\cos^2(y)\,dx\,dy} = \pi\sqrt{3}$$

$$\|s\|_C = \max_{(x,y)\in[0,2\pi]x[0,2\pi]}\left|[1-\sin(x)]\cos(y)\right| = 2$$

Przykłady unormowanych przestrzeni sygnałów dyskretnych

$$s = [s(0), s(1), \ldots, s(N)]$$

l^2 $$\|s\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |s(n)|^2}$$

l^∞ $$\|s\|_{l^\infty} = \max_n |s(n)|$$

$$\|s\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} |s(m,n)|^2}$$

$$\|s\|_{l^\infty} = \sup_{m,n} |s(m,n)|$$

Definicja iloczynu skalarnego

Iloczynem skalarnym pary elementów należących do S nazywamy operację, która tej parze przyporządkowuje liczbę $\langle s_1, s_2 \rangle$ w taki sposób, że spełnione są następujące aksjomaty :

1. $\langle s, s \rangle = 0$ dla $s = \varnothing$ i $\langle s, s \rangle > 0$ dla $s \neq \varnothing$
2. $\langle \alpha s_1, s_2 \rangle = \alpha \langle s_1, s_2 \rangle \qquad \alpha \in \mathbf{C}$
3. $\langle s_1 + s_2, s_3 \rangle = \langle s_1, s_3 \rangle + \langle s_2, s_3 \rangle$
4. $\langle s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, s_1 \rangle^*$

Przykłady przestrzeni unitarnych

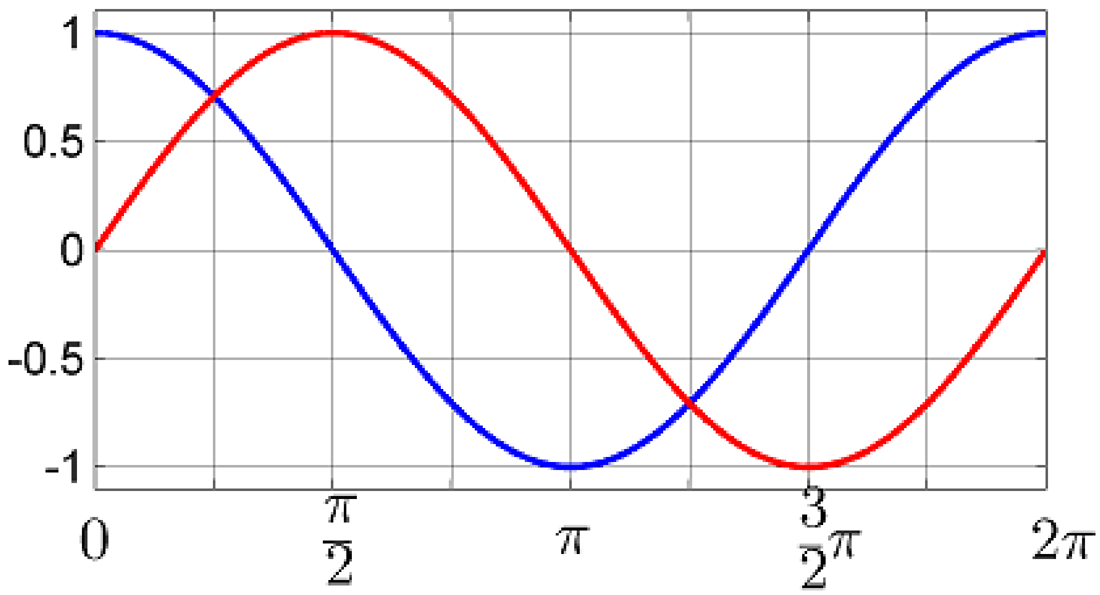
$$\langle s_1, s_2 \rangle_{L^2} = \int_0^T s_1(t) s_2^*(t) dt$$

$$\langle s_1, s_2 \rangle = s_1^T s_2^* = \sum_n s_1(n) s_2^*(n)$$

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^Y \int_0^X s_1(x, y) s_2^*(x, y) dxdy$$

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_m \sum_n s_1(m, n) s_2^*(m, n)$$

Przykład sygnałów ortogonalnych



Czy sygnały $s_1(t) = \sin(t)$ oraz $s_s(t) = \cos(t)$ są sygnałami ortogonalnymi w przestrzeni $\mathbf{L}^2(0,2\pi)$?

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt = 0$$

Zerowa wartość oznacza, że sygnały s_1 i s_2 są ortogonalne w $L^2(0,2\pi)$

Odległość między sygnałami ortogonalnymi

Czy sygnały $s_1(t) = 1$ i $s_2(t) = 2t - 1$ są ortogonalne?

Jaka jest między nimi odległość w przestrzeni $L^2(0,1)$?

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^1 (2t-1)\,dt = \left(t^2 - t\right)\Big|_0^1 = 0$$

Zerowanie iloczynu skalarnego oznacza, że sygnały są względem siebie prostopadłe. Odległość między nimi wynosi

$$\rho(s_1, s_2) = \sqrt{\int_0^1 (2t-2)^2\,dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Związek między przestrzenią unitarną i unormowaną

Przy pomocy iloczynu skalarnego można zdefiniować normę, czyli każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 1.

Funkcjonał zdefiniowany wzorem

$$\|s\| = \sqrt{\langle s, s \rangle}$$

dla $s \in S$ jest normą w przestrzeni unitarnej *S*.

Związek między przestrzenią unormowaną i metryczną

Przy pomocy normy można zdefiniować metrykę, czyli każda przestrzeń unormowana jest metryczna.

Twierdzenie 1.

Funkcjonał zdefiniowany wzorem $\rho(s_1, s_2) = \|s_1 - s_2\|$

dla $s_1, s_2 \in S$ jest metryką w unormowanej przestrzeni *S*.

Definicja metryki przesuwalnej i bezwzględnie jednorodnej

Mówimy, że *metryka* w przestrzeni S jest *przesuwalna* jeśli spełniony jest warunek $\rho(s_1 + s_3, s_2 + s_3) = \rho(s_1, s_2)$

dla dowolnych $s_1, s_2, s_3 \in S$

Metryka jest *bezwzględnie jednorodna* jeśli zachodzi

$$\rho(\alpha s_1, \alpha s_2) = |\alpha| \rho(s_1, s_2)$$

dla dowolnych $s_1, s_2 \in S$ oraz dla każdego $\alpha \in \Re$

Związek między przestrzenią metryczną i unormowaną

Przy pomocy metryki można czasami zdefiniować normę, czyli w przestrzeni metrycznej bywa zdefiniowana norma.

Twierdzenie 3.

Jeżeli metryka w przestrzeni S jest przesuwalna i bezwzględnie jednorodna to wtedy i tylko wtedy przestrzeń S jest unormowana. Norma dana jest wzorem

$$\|s\| = \rho(s, \varnothing)$$