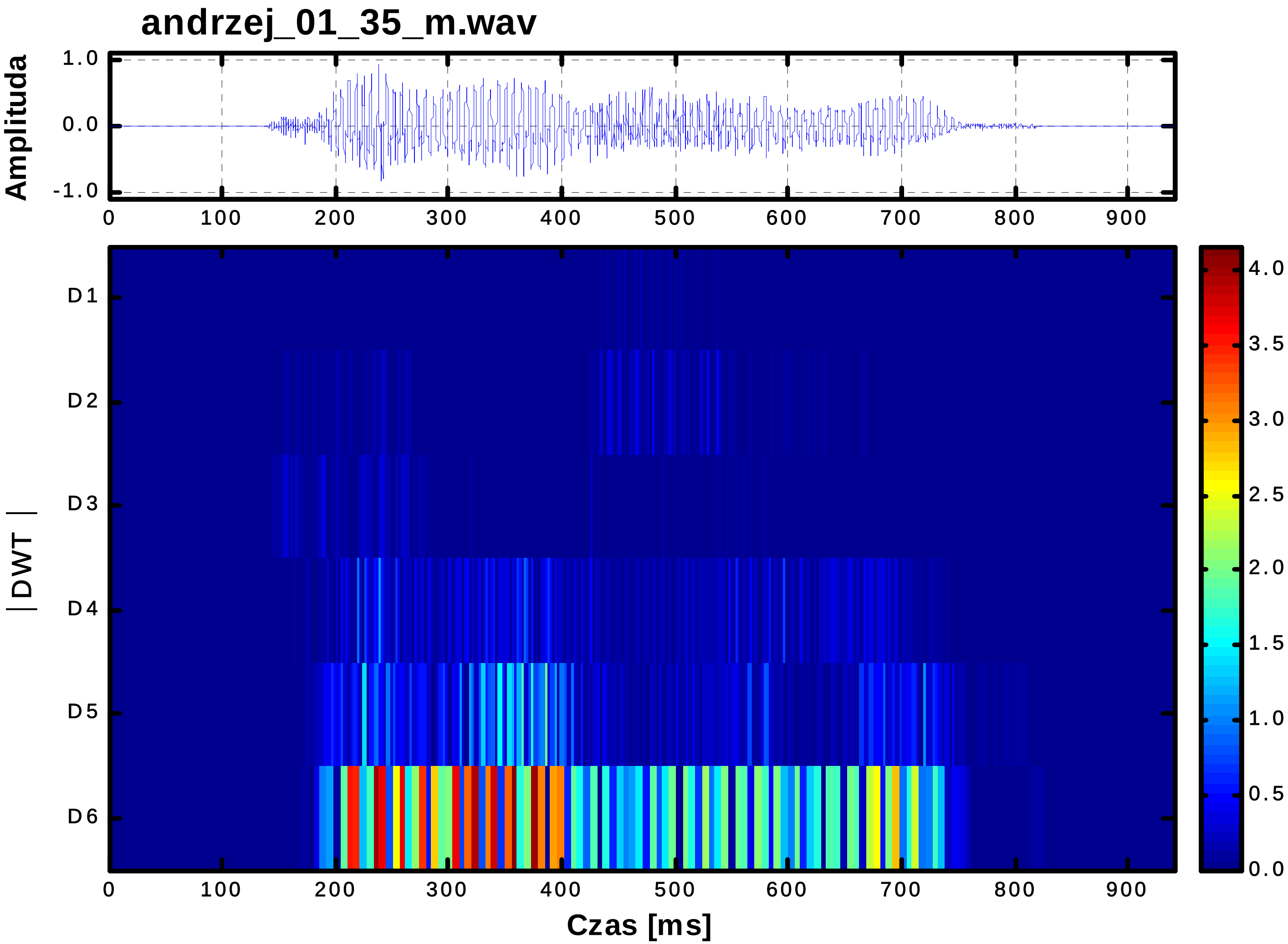
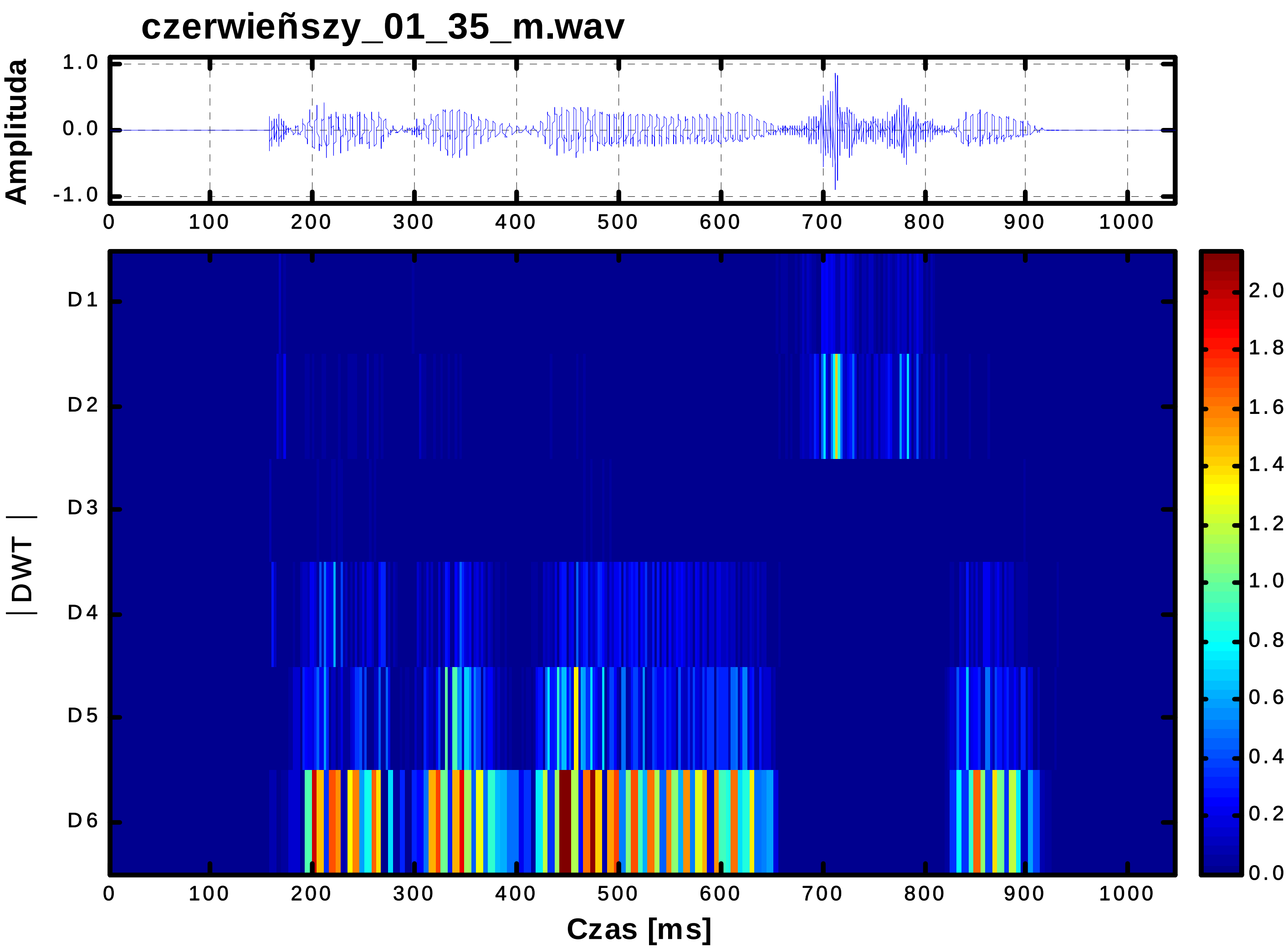
LOKALNA ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA SYGNAŁÓW

Spis treści

Analiza czasowo-częstotliwościowa sygnału mowy

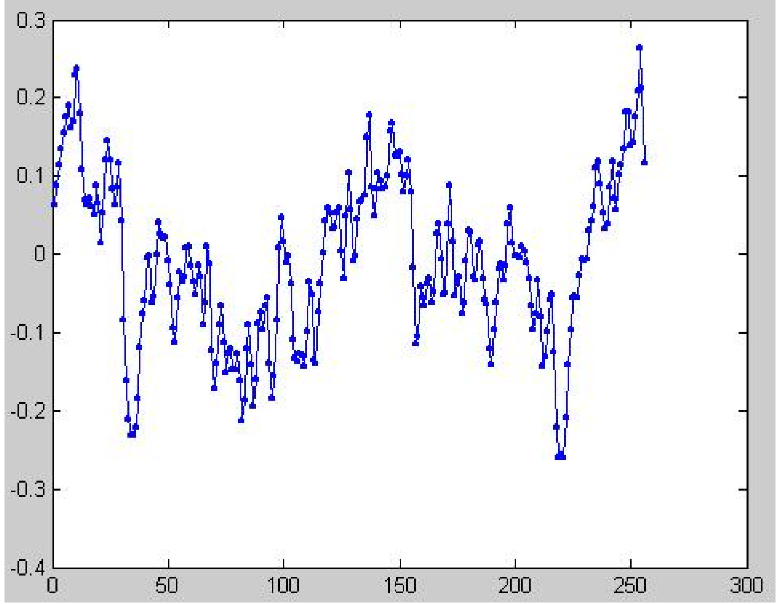


Kolejny przykład sygnału mowy



Krótkoczasowa transformacja Fouriera

Ang. short-time Fourier transform



$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |t| \le 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Widmo czasowo-częstotliwościowe można obliczyć posługując się wzorem

$$\hat{s}_w(b, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\Pi(t-b)e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-1+b}^{1+b} s(t)e^{-2\pi j f t} dt$$

Porównanie transformaty Fouriera z ....

Załóżmy, że

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Jak wiemy uogólniona transformata Fouriera tego sygnału ma postać

$$\hat{s}(f) = 0.5\,\delta(f - f_0) + 0{,}5\,\delta(f + f_0)$$

Obliczmy teraz jego krótkotrwałą transformatę Fouriera ograniczoną do przedziału $[-4,4]$

.... krótkoczasową transformatą Fouriera

Odpowiada to znalezieniu widma sygnału

$$s_w(t) = \Pi\left(t/4\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

czyli

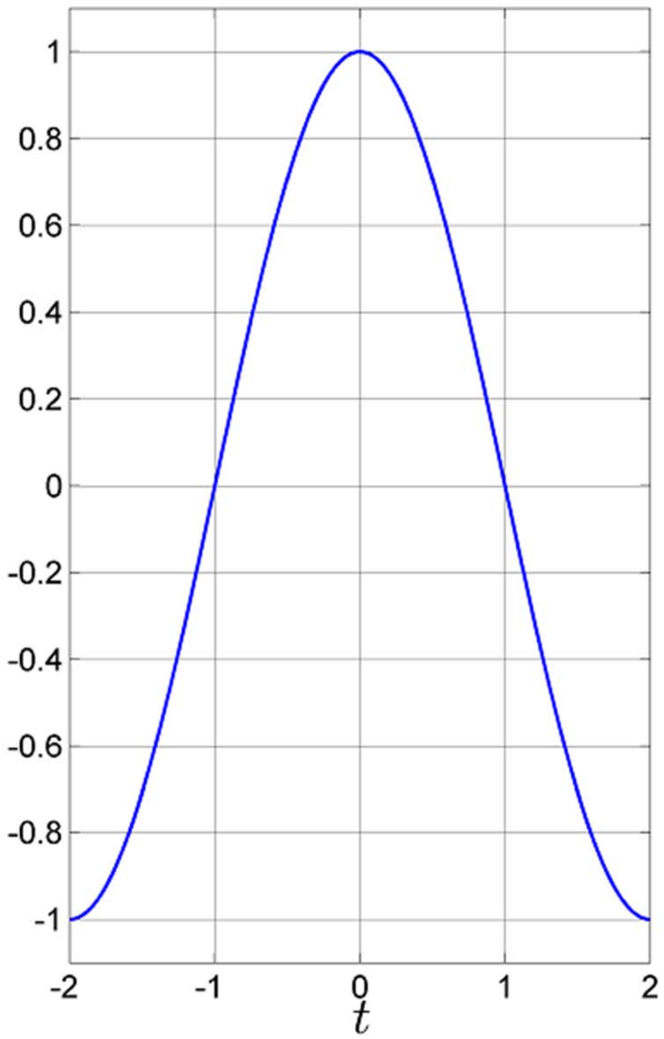
$$\hat{s}_w(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\,\Pi(t/4)\,e^{-2\pi j f t}\,dt = \int_{-4}^{4} \cos(2\pi f_0 t)\,e^{-2\pi j f t}\,dt$$

Posługując się wzorem na transformatę sygnału zmodulowanego otrzymujemy

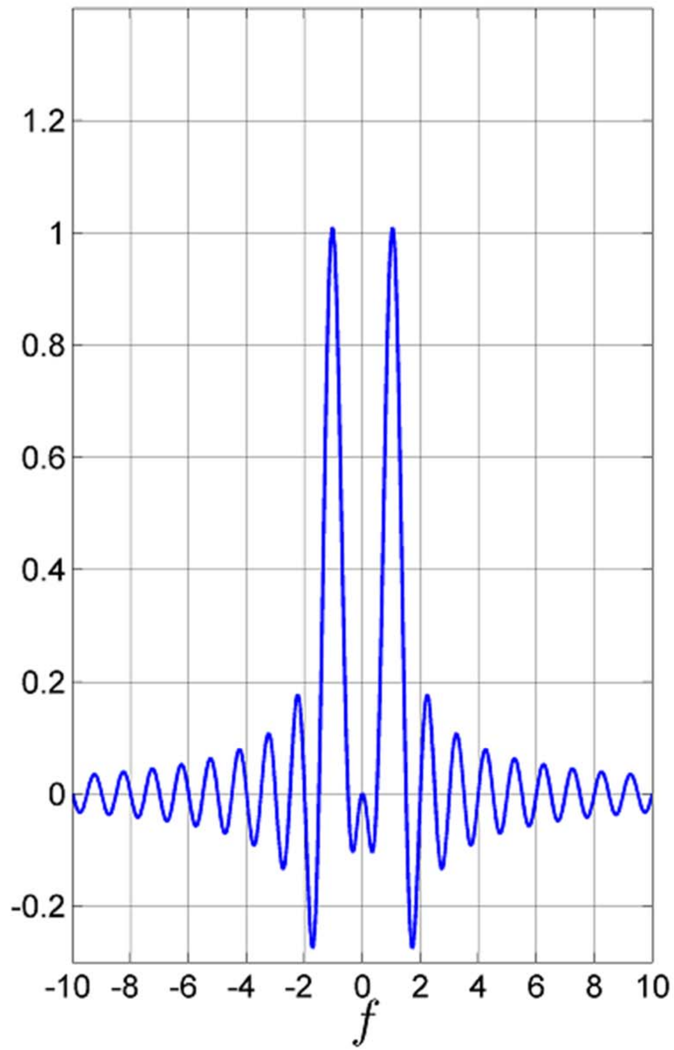
$$\hat{s}_w(f) = \frac{\sin\left(8\pi(f - f_0)\right)}{8\pi(f - f_0)} + \frac{\sin\left(8\pi(f + f_0)\right)}{8\pi(f + f_0)}$$

Ilustracja przykładu

Sygnał *s(t)*



Jego transformata



Widmo okna

$$\hat{w}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

Okno z nośnikiem zwartym

$w(t) = 0$ dla $|t| > T_w$

$2T_w$ jest nazywane rozmiarem okna

Środek i szerokość okna

Środek okna

$$c_w = \frac{1}{\|w\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, w^2(t)\, dt$$

$\frac{w^2(t)}{\|w\|^2}$ odpowiada gęstości prawdopodobieństwa

Szerokość okna

$$\Delta_w = \frac{2}{\|w\|} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - c_w\right)^2 w^2(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

gdzie norma jest obliczana w przestrzeni $L^2(\Re)$

czyli $\|w\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)\, dt}$

Normalizacja okna

Okno $w(t)$ powinno być *znormalizowane*

$$w(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(f)\, df = 1$$

Po przesunięciu

$$w(t - c_w) \leftrightarrow \hat{w}(f) e^{2\pi j f c_w}$$

czyli okno też będzie znormalizowane bo

$$w(c_w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(f) e^{2\pi j f c_w} df = 1$$

gdzie c_w jest *środkiem okna.*

Widmo sygnału wyciętego przez okno

Sygnał $s(t)$ pomnożony przez okno $w(t)$ posiada widmo

Zależne zarówno od widma sygnału (**bardzo dobrze**!)
jak i widma zastosowanego okna (**bardzo źle**!)

$$\hat{s}_w(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, w(t)\, e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f-g)\, \hat{w}^*(g)\, dg$$

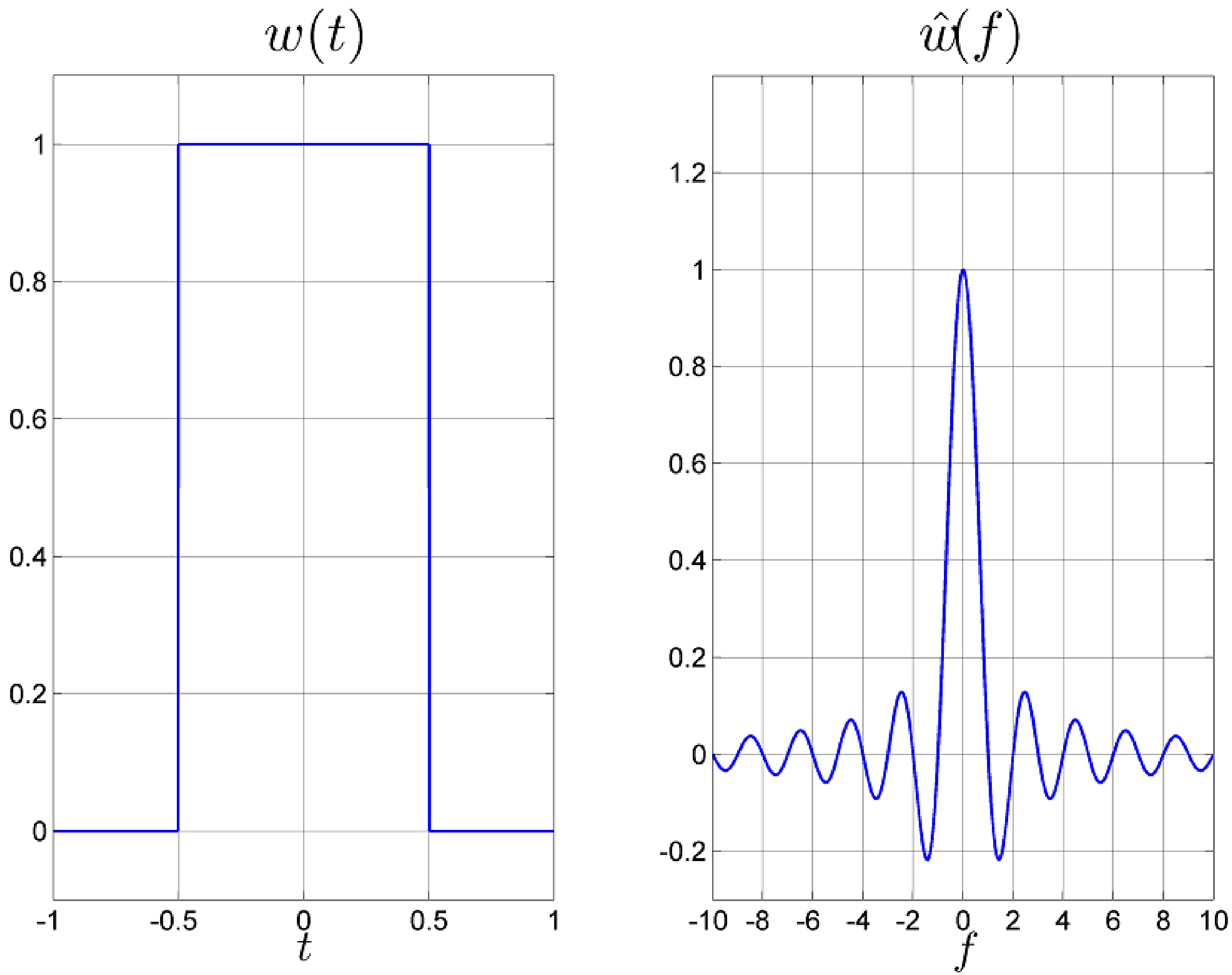
gdzie $\hat{w}^*(f)$ oznacza funkcję sprzężoną do widma $\hat{w}(f)$

$$\boxed{\hat{s}_w(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_w(t) e^{-2\pi j f t} dt}$$

$$s_w(t) = s(t)\, w(t)$$

$$\boxed{\hat{s}_w(f, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) w(t-b) e^{-2\pi j f t} dt}$$

Okno prostokątne (rysunek)



Okno prostokątne

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

$$\|w\|^2 = \int_{-T}^{T} dt = 2T$$

środek okna znajduje się w zerze $\qquad c_w = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} t\, dt = 0$

a szerokość okna zgodnie z przyjętą definicją wynosi

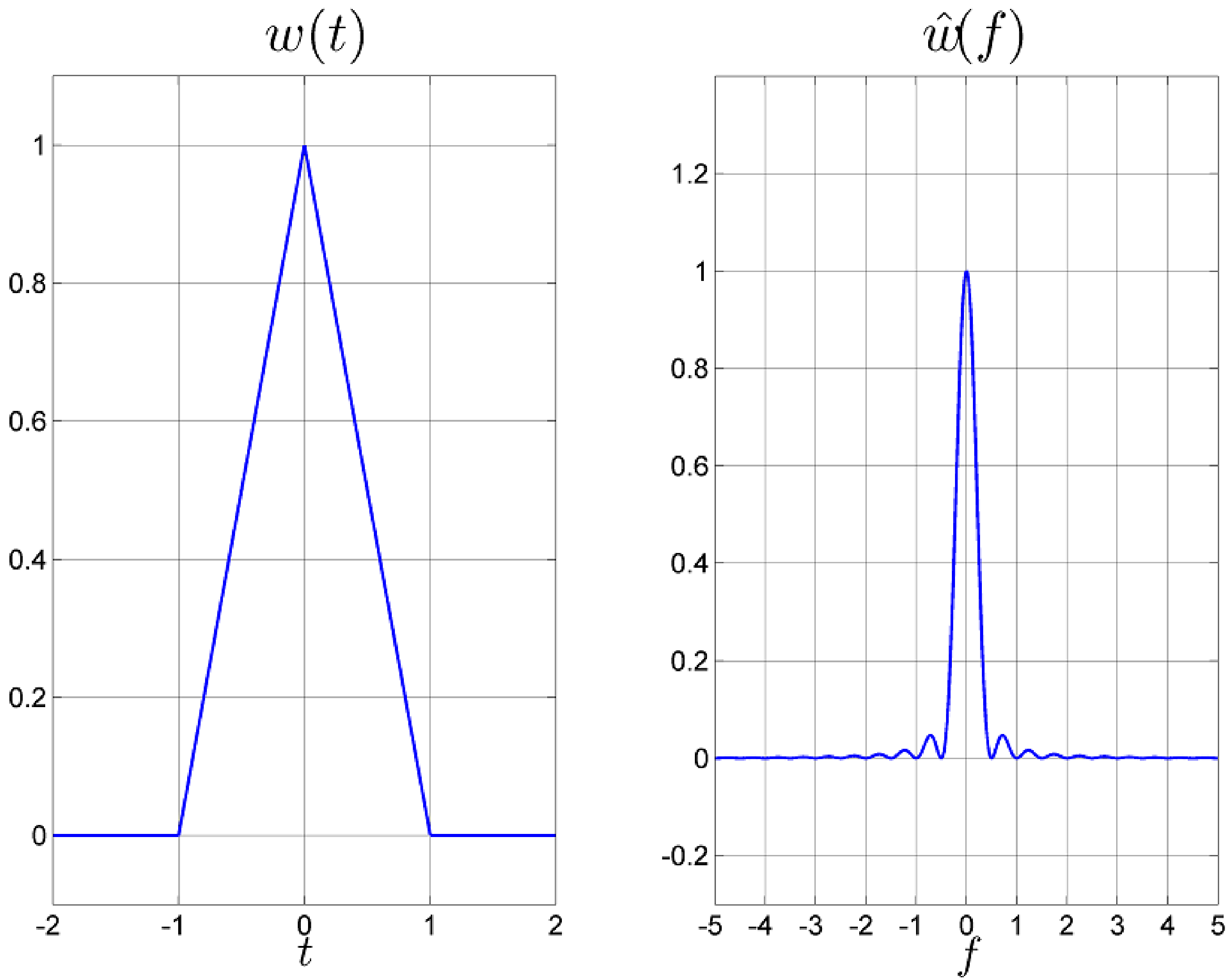
$$\Delta_w = \frac{2}{\sqrt{2T}} \left(\int_{-T}^{T} t^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2T}{\sqrt{3}}$$

czyli jest różna od $2T$.

Widmo częstotliwościowe tego okna ma postać

$$\hat{w}(f) = \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}$$

Okno Bartletta (rysunek)



Okno Bartletta zwane trójkątnym

$$w(t)=\begin{cases}1-\frac{|t|}{T} & \text{dla} \quad |t|\le T\\ 0 & \text{dla} \quad |t|>T\end{cases}$$

$$\|w\|^2=\int_{-T}^{0}\left(1+\frac{t}{T}\right)^2 dt+\int_{0}^{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 dt=\frac{2}{3}T$$

środek tego okna również znajduje się w zerze, co można łatwo policzyć

$$c_w=\frac{3}{2T}\left\{\int_{-T}^{0} t\left(1+\frac{t}{T}\right)^2 dt+\int_{0}^{T} t\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 dt\right\}=0$$

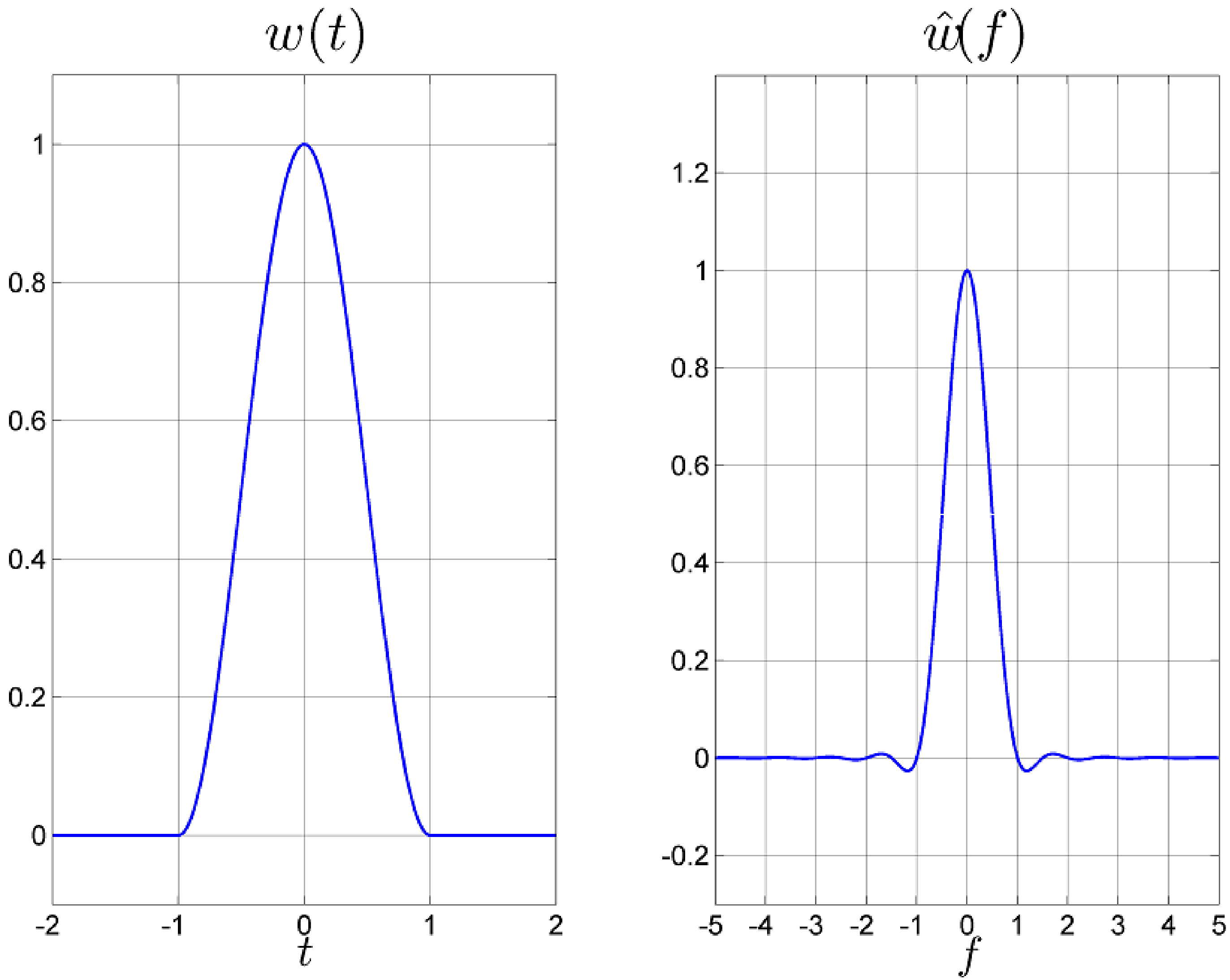
Szerokość okna wynosi

$$\Delta_w=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{T}}\left\{\int_{-T}^{0} t^2\left(1+\frac{t}{T}\right)^2 dt+\int_{0}^{T} t^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 dt\right\}=\sqrt{\frac{2}{5}}T$$

a widmo częstotliwościowe

$$\hat{w}(f)=\frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 T f^2}$$

Okno Hanna (rysunek)



$$w(t) = \begin{cases} 0{,}5\left[1+\cos(\pi t/T)\right] & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

$$\hat{w}(f) = \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi(1-4T^2 f^2) f}$$

Okno Hanna

$$w(t) = \begin{cases} 0{,}5\left[1+\cos(\pi t/T)\right] & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

$$\|w\|^2 = \frac{1}{4}\int_{-T}^{T}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right]^2 dt = \frac{3}{4}T$$

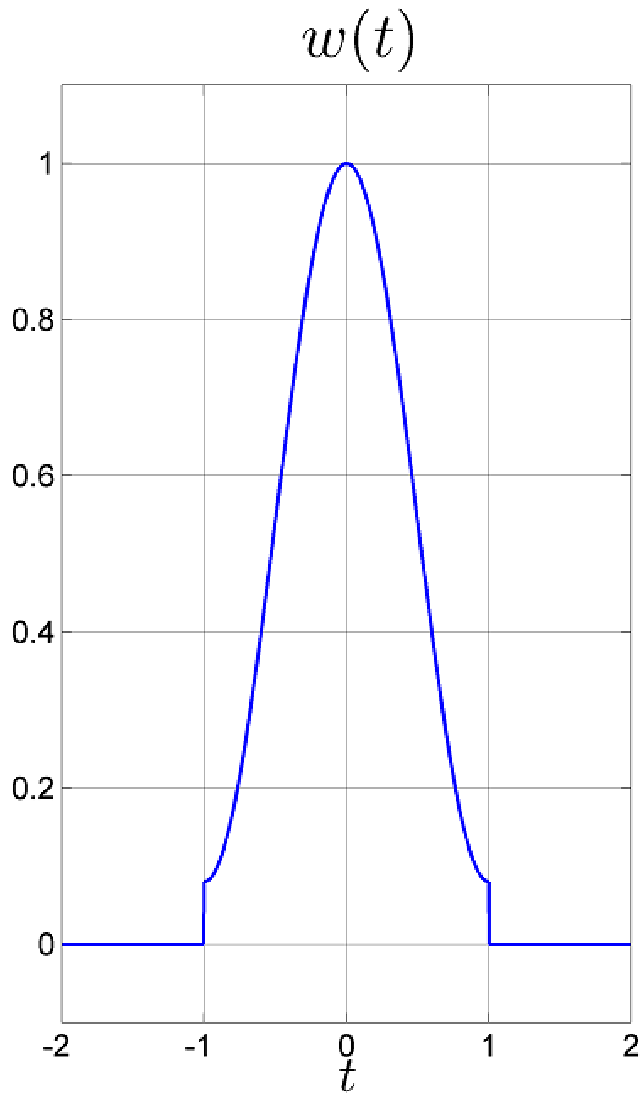
bo

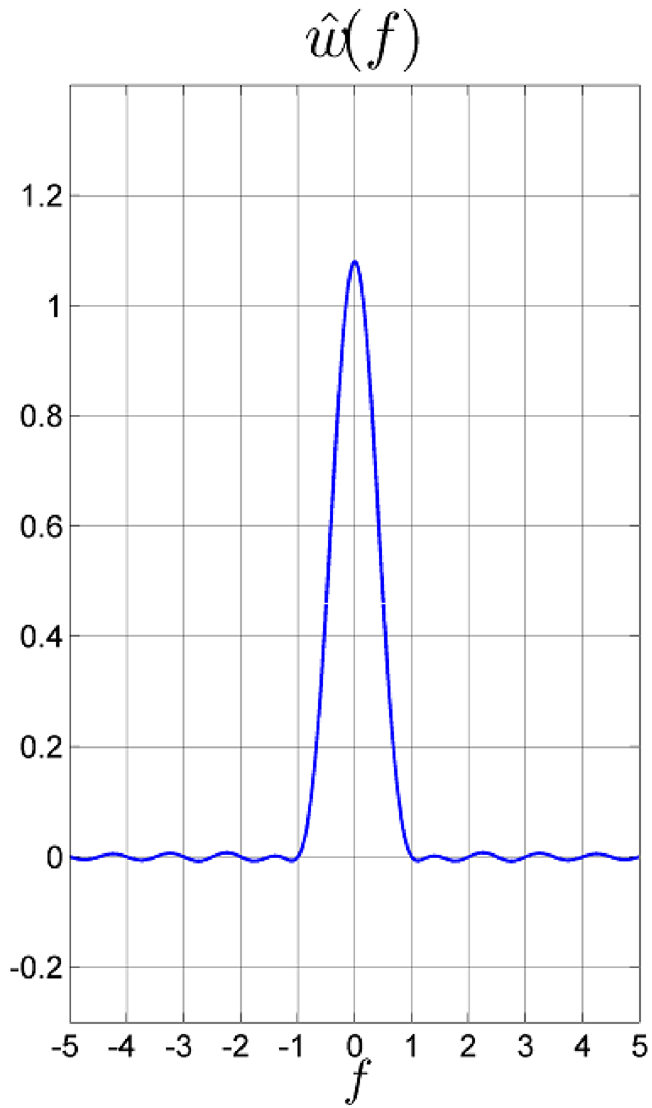
$$\int \cos^2(at)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4a}\sin(2at)$$

Widmo częstotliwościowe ma postać

$$\hat{w}(f) = \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi(1-4T^2 f^2) f}$$

Okno Hamminga

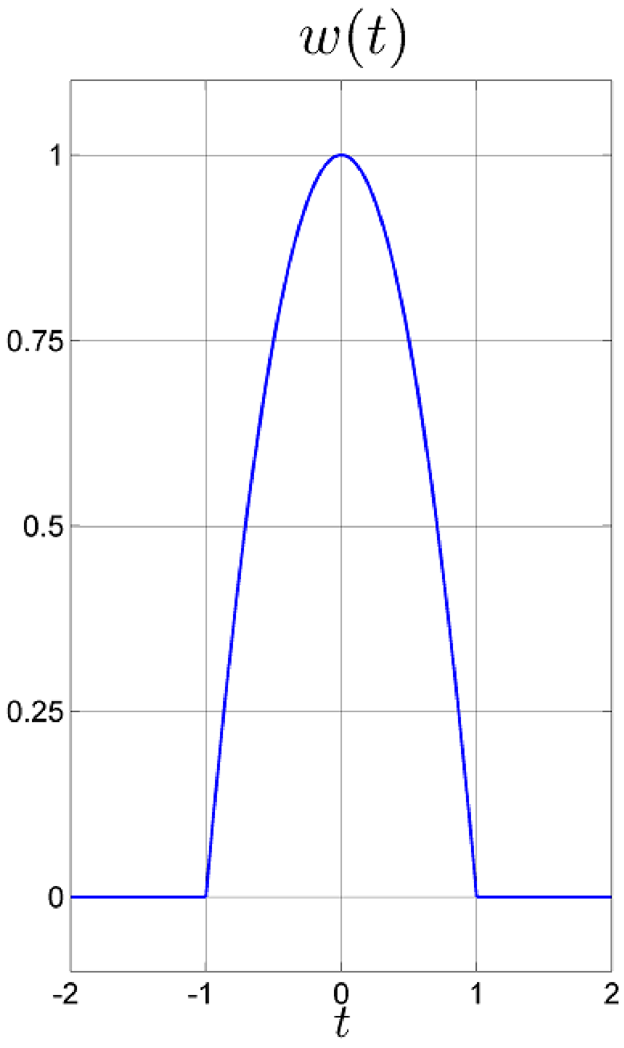


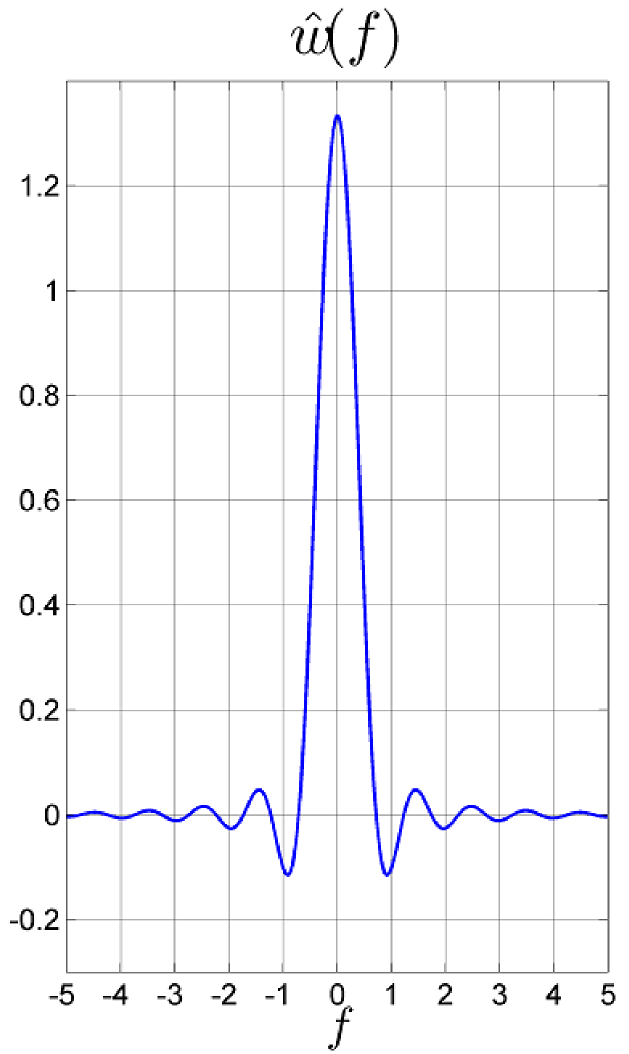


$$w(t) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(\pi t / T) & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

$$\hat{w}(f) = \frac{(1{,}08 - 0{,}64 T^2 f^2)\sin(2\pi T f)}{2\pi f (1 - 4T^2 f^2)}$$

Okno paraboliczne

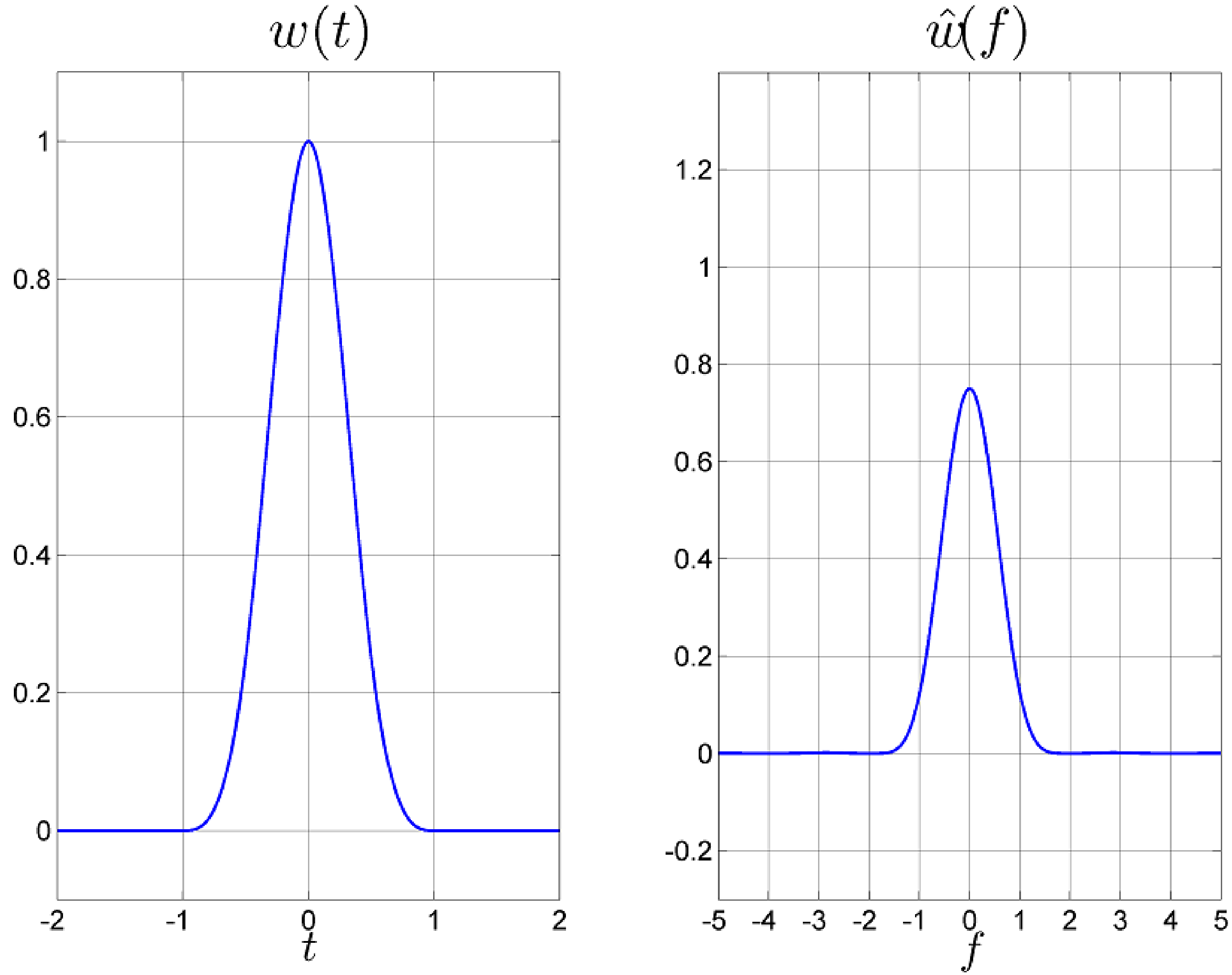




$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{4T}\left[1-(t/T)^2\right] & \text{dla} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

Okno Parzena (rysunek)

jest zbudowane z wielomianów trzeciego stopnia



Okno Parzena

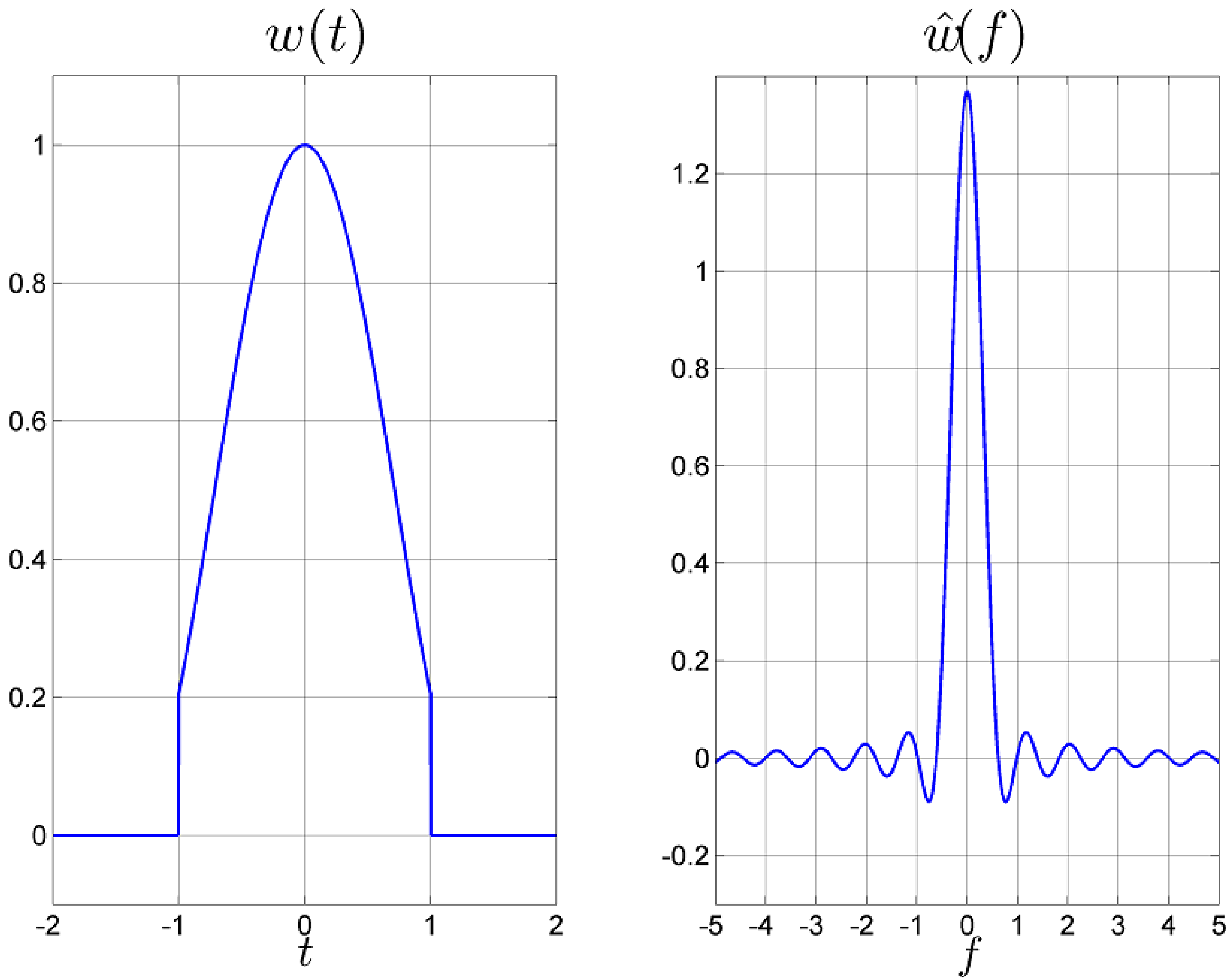
rok 1961

$$w(t) = \begin{cases} 1 - 6t^2/T^2 + 6|t|^3/T^3 & \text{dla} \quad |t| \le T/2 \\ 2(1 - |t|/T)^3 & \text{dla} \quad T/2 < |t| \le T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

ma charakterystykę częstotliwościową

$$\hat{w}(f) = \frac{12}{\pi^4 T^3 f^4} \sin^4(\pi T f/2)$$

Okno Kaisera (rysunek), β=3



Okno Kaisera

$$\boxed{w(t) = \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)} \qquad\qquad |t| \le \frac{T}{2}}$$

gdzie $I_0(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^k \right]^2$ jest funkcją Bessela rzędu zerowego

$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{T-1} \right)^2}$$

Okno Gaussa

$$w(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

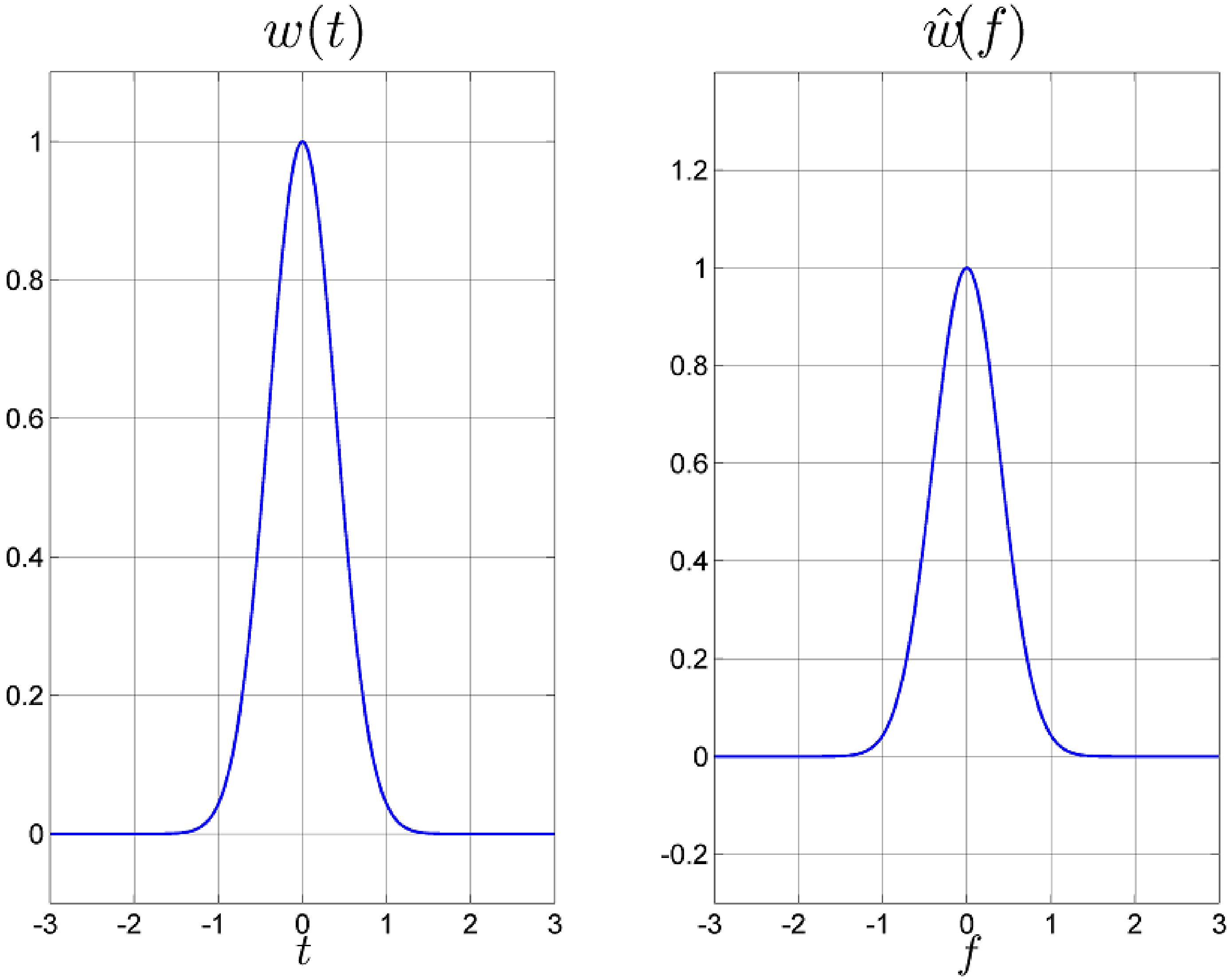
Jego szerokość wynosi

$$\Delta_w = \frac{2}{\|w_a\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 w_a^2(t)\, dt \right\}^{0,5} = 2\sqrt{a}$$

a widmo częstotliwościowe

$$\hat{w}(f) = e^{-4\pi^2 \alpha f^2}$$

Okno Gaussa (rysunek)



Powtórka

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$s(t)\,e^{2\pi j f_0 t} \leftrightarrow \hat{s}(f - f_0)$$

$$s(t)\,e^{-2\pi j f_0 t} \leftrightarrow \hat{s}(f + f_0)$$

Sumując obustronnie otrzymujemy

$$2s(t)\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \hat{s}(f - f_0) + \hat{s}(f + f_0)$$

Przykład

Dany jest sygnał $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

który ma widmo $\hat{s}(f) = 0{,}5[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

Jakie jest widmo po wymnożeniu tego sygnału przez wybrane okno ?

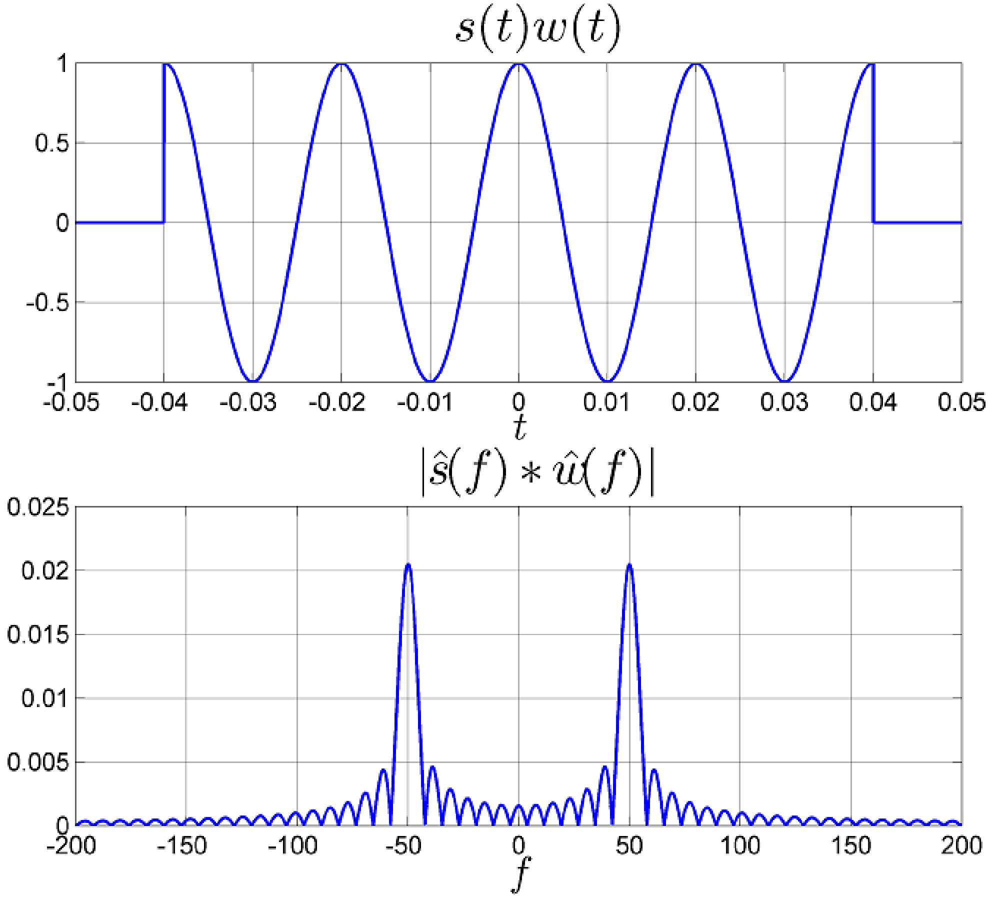
$$s_w(t) = w(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Odpowiedź jest prosta. Postać widma lokalnego

$$\boxed{\hat{s}_w(f) = \frac{1}{2}[\hat{w}(f - f_0) + \hat{w}(f + f_0)]}$$

zależy od widma okna i częstotliwości analizowanego sygnału.

Przykład z oknem prostokątnym



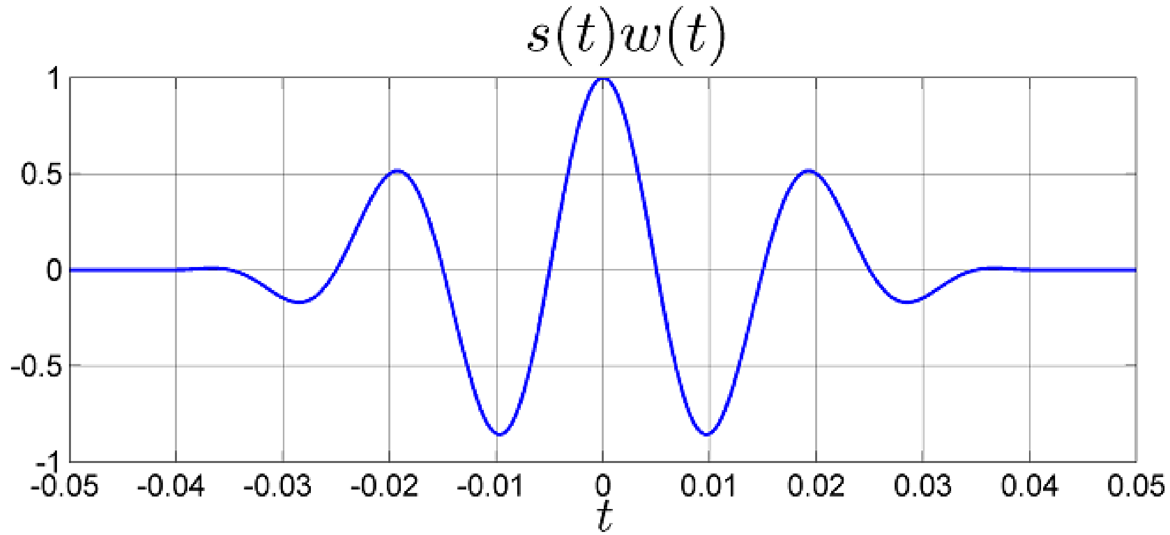
Widmo iloczynu dwóch sygnałów jest równe splotowi ich widm, czyli

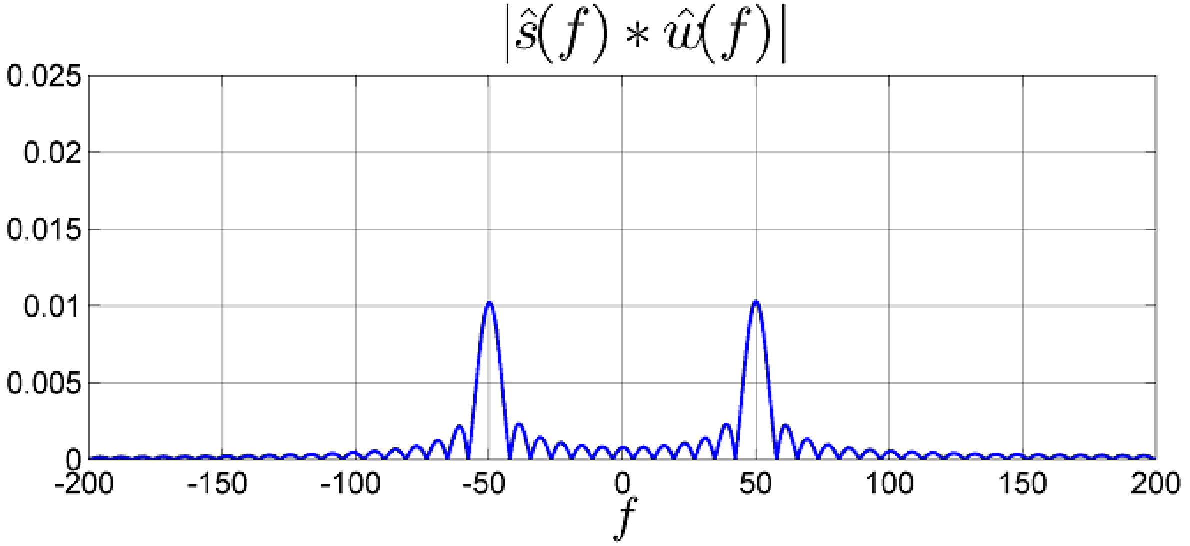
$$\hat{s}_w(f) = \int_{-T}^{T} 0{,}5\left[\delta(f - f_0 - \varphi) + \delta(f + f_0 - \varphi)\right]\frac{\sin(2\pi T\varphi)}{\pi\varphi}d\varphi$$

Zatem

$$\boxed{\hat{s}_w(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(2\pi T(f - f_0)\right)}{(f - f_0)} + \frac{\sin\left(2\pi T(f + f_0)\right)}{(f + f_0)}\right]}$$

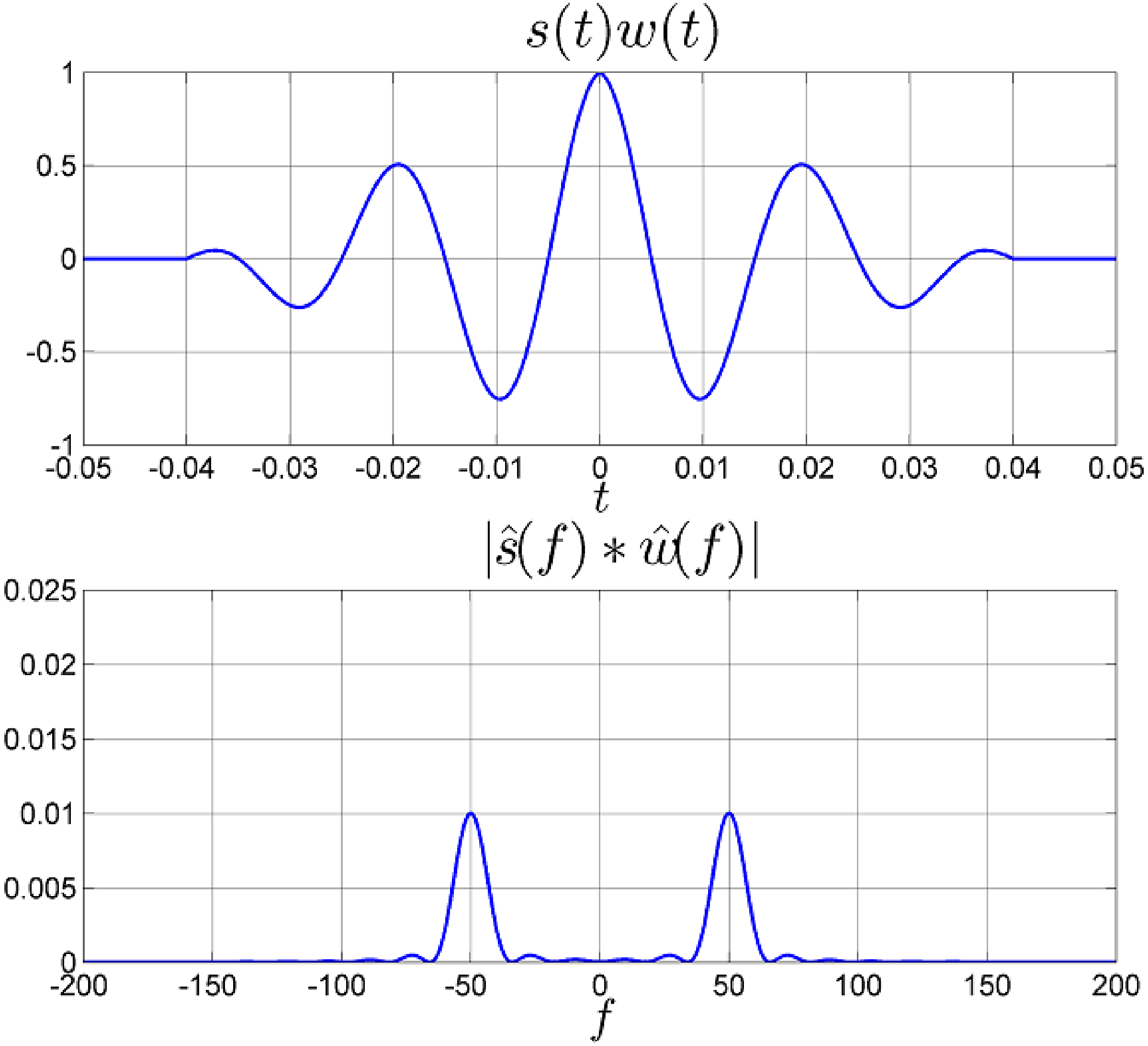
Przykład z oknem Bartletta





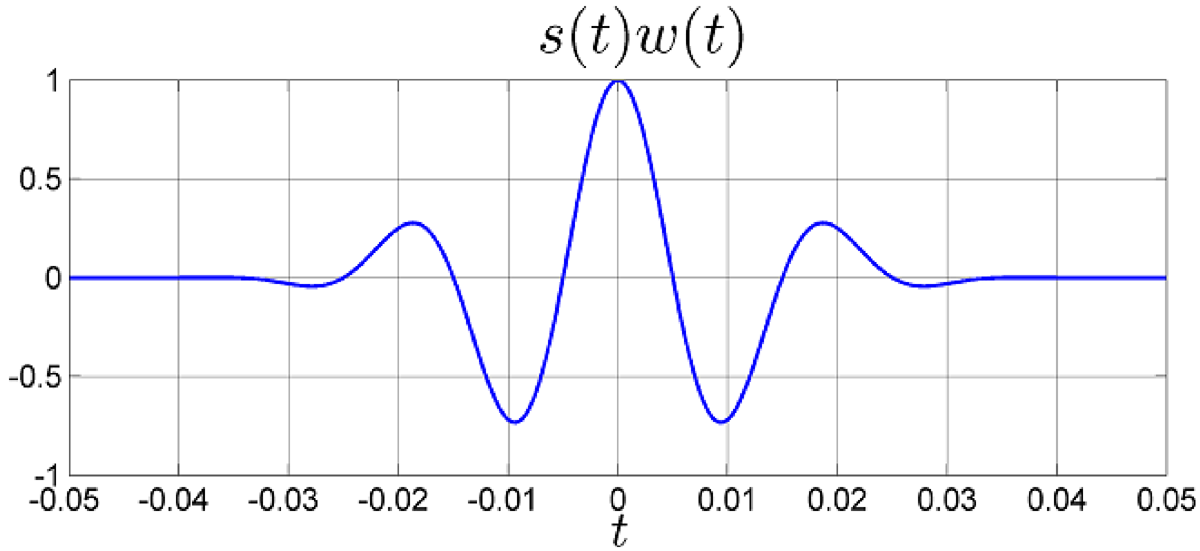
$$\hat{s}_w(f) = \frac{1}{2\pi^2 T}\left\{\frac{\sin^2\left(\pi T(f - f_0)\right)}{(f - f_0)^2} + \frac{\sin^2\left(\pi T(f + f_0)\right)}{(f + f_0)^2}\right\}$$

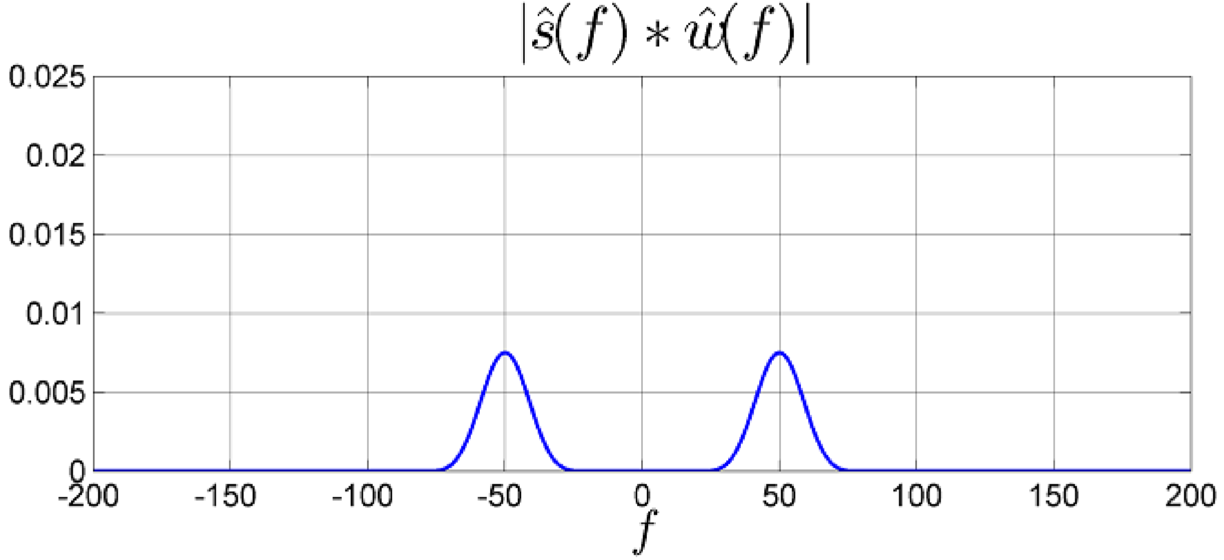
Przykład z oknem Hanna



$$\hat{s}_w(f) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\sin\left(2\pi T(f-f_0)\right)}{(f-f_0)[1-4T^2(f-f_0)^2]} + \frac{\sin\left(2\pi T(f+f_0)\right)}{(f+f_0)[1-4T^2(f+f_0)^2]}\right\}$$

Przykład z oknem Parzena





$$\hat{s}_w(f) = \frac{6}{\pi^4 T^3}\left\{\frac{\sin^4\left(0{,}5\pi T(f-f_0)\right)}{(f-f_0)^4} + \frac{\sin^4\left(0{,}5\pi T(f+f_0)\right)}{(f+f_0)^4}\right\}$$

Transformacja Gabora

opiera się na funkcji Gaussa $$w_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

i jest zdefiniowana następująco

$$\boxed{\hat{s}(f,a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, w_a(t-b)\, e^{-2\pi j f t} dt}$$

Posiada własności

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_a(t-b)\, db = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f,a,b) db = \hat{s}(f)$$

Transformację Gabora można zatem zapisać w postaci

$$\boxed{\hat{s}(f,a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \varphi_{a,b}(f,t)\, dt}$$

gdzie $$\varphi_{a,b}(f,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(t-b)^2}{4a} - 2\pi j f t}$$