Transformacja Hilberta (1905)

Zdjęcie http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Transformacja Hilberta jest liniowym przekształceniem całkowym w tej samej dziedzinie, tzn. zarówno dla sygnału jak i jego transformaty, argument jest najczęściej utożsamiany z czasem.

Przedstawione poniżej własności **najczęściej wymagają** założenia, że **sygnał przyjmuje wartości rzeczywiste**.

Transformacja została zaproponowana przez słynnego niemieckiego matematyka Dawida Hilberta (1862-1943).

Polecana literatura: Alexander D. Poularikas (Ed.): The Transforms and Applications Handbook. CRC Press, Inc. 1996.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_transform

Definicja transformacji Hilberta

$$\overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\frac{1}{\tau - t}\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{s}(\tau)\,\frac{1}{\tau - t}\,d\tau$$

Całka jest rozumiana jako Cauchy'ego wartość główna całki, czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} := \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} + \int_{\tau+\varepsilon}^{\infty} \right) \qquad \text{gdzie} \qquad \varepsilon > 0.$$

Transformacja jest splotem funkcji $s(t)$ i $\pi^{-1}t^{-1}$ a transformacja odwrotna jest splotem funkcji $\overleftrightarrow{s}(\tau)$ i $-\pi^{-1}t^{-1}$.

Jądra transformacji Hilberta są samosprzężone, tzn.

$$\theta(\tau, t) = \psi^{*}(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t}$$

czyli transformacja Hilberta zachowuje iloczyn skalarny.

Transformacja Hilberta jest splotem

$$\breve{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\tau - t} dt \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \breve{s}(\tau) \frac{1}{\tau - t} d\tau$$

Transformacja jest splotem funkcji $s(t)$ i $\pi^{-1}t^{-1}$, zatem dla obu stron wzoru definiującego transformację Hilberta możemy obliczyć transformaty Fouriera otrzymując

$$\hat{\breve{s}}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,\hat{s}(f) \quad \text{bo} \quad \frac{1}{\pi t} \overset{\text{Fourier}}{\Leftrightarrow} -j\,\mathrm{sgn}(f).$$

Czyli transformata Hilberta $\breve{s}(\tau)$ jest odwrotną transformatą Fouriera

z funkcji $-j\,\mathrm{sgn}(f)\,\hat{s}(f)$.

Wyznaczanie transformaty Hilberta z transformaty Fouriera

Skoro transformata Hilberta $\overleftrightarrow{s}(\tau)$ jest odwrotną transformatą Fouriera z funkcji $-j\,\mathrm{sgn}(f)\,\hat{s}(f)$, to można zaproponować następujący algorytm:

1. Dla funkcji $s(t)$ obliczyć transformatę Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

2. Transformatę Fouriera pomnożyć przez $-j\,\mathrm{sgn}(f)$

3. Obliczyć odwrotną transformatę Fouriera

$$\overleftrightarrow{s}(\tau) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(f)\, \hat{s}(f)\, e^{2\pi j f \tau}\, df,$$

która jest równa transformacie Hilberta.

Wniosek. Wystarczy mieć oprogramowanie dla transformacji Fouriera !

$$s^{wy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)s^{we}(\tau)d\tau$$

Transformacja Hilberta jest filtrem

$$\vec{s}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\frac{1}{\tau - t}\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{s}(\tau)\,\frac{1}{\tau - t}\,d\tau$$

Transformacja jest splotem funkcji $s(t)$ i $\pi^{-1}t^{-1}$, czyli transformację można utożsamiać z filtracją sygnału. Filtr ma odpowiedź impulsową $\pi^{-1}t^{-1}$, co oznacza że jest filtrem nieprzyczynowym. Charakterystyka zespolona

$H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$, charakterystyka amplitudowa $A(f) = 1$,a fazowa

$$\theta(f) = \begin{cases} 0{,}5\pi & \text{dla} \quad f < 0 \\ -0{,}5\pi & \text{dla} \quad f > 0 \end{cases}.$$

Zatem sygnał i jego transformata Hilberta mają takie same widma amplitudowe, fazowe dla ujemnych częstotliwości różnią się o $\pi/2$, a dla dodatnich częstotliwości o $-\pi/2$.

Parzystość i nieparzystość transformat Hilberta

Pamiętamy, że transformata Fouriera z funkcji parzystej jest funkcją parzystą o wartościach rzeczywistych. Natomiast dla funkcji nieparzystej, transformata ma tylko część urojoną, która jest funkcją nieparzystą. Skoro

$$\vec{s}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f)\,\hat{s}(f)\left[\sin(2\pi f\tau) - j\cos(2\pi f\tau)\right]df,$$

zamienia parzystą na nieparzystą
i vice versa

bo $\vec{s}(\tau) = -j\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f)\,\hat{s}(f)\,e^{2\pi jf\tau}\,df,$

to:

Jeżeli $s(t)$ jest funkcją parzystą, to $\vec{s}(t)$ jest funkcją nieparzystą.

Jeżeli $s(t)$ jest funkcją nieparzystą, to $\vec{s}(t)$ jest funkcją parzystą.

Wielokrotne transformacje Hilberta

$$\vec{s}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\frac{1}{\tau - t}\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{s}(\tau)\,\frac{1}{\tau - t}\,d\tau$$

Skoro $H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$ a dla odwrotnej transformacji $H^{-1}(f) = j\,\mathrm{sgn}(f)$,

to dwukrotna transformacja sygnału jest równoważna filtracji $H^{2}(f) = -1$,

czyli druga transformata różni się od sygnału tylko przeciwnym znakiem. Trzykrotna transformacja Hilberta jest równa odwrotnej transformacji Hilberta, tzn. $H^{3}(f) = H^{-1}(f) = j\,\mathrm{sign}(f)$ a czterokrotna jest operacją tożsamościową $H^{4}(f) = 1$.

Transformacja Hilberta dla pochodnej

Transformacja Hilberta dla pochodnej sygnału $\frac{d^n}{dt^n} s(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^n}{d\tau^n} \overleftrightarrow{s}(\tau)$

Dowód. Do wzoru $\overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{\tau - t} dt$ transformacji Hilberta

podstawiamy $t = \tau - \theta$ otrzymując

$$\overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau - \theta)}{\theta} d\theta$$

Obustronnie różniczkujemy $\frac{d}{d\tau} \overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s'(\tau - \theta)}{\theta} d\theta$

Wracając do poprzedniej zmiennej, ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{d}{d\tau} \overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s'(t)}{\tau - t} dt$$

Dla wyższych pochodnych stosujemy procedurę iteracyjną.

Mnożenie przez czas i zachowanie iloczynu skalarnego

Mnożenie sygnału przez czas powoduje mnożenie transformaty przez jej argument i odjęcie wartości proporcjonalnej do składowej stałej sygnału

$$t\,s(t) \quad \Leftrightarrow \quad \tau\,\overset{\leftrightarrow}{s}(\tau) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt$$

Dla sygnału parzystego wartość całki jest równa 0.

Skoro jądro transformacji jest samosprzężone, to $\left\langle \overset{\leftrightarrow}{s}_1, \overset{\leftrightarrow}{s}_2 \right\rangle = \left\langle s_1, s_2 \right\rangle$

czyli transformacja Hilberta zachowuje energię, tzn $\left\| s \right\|^2 = \left\| \overset{\leftrightarrow}{s} \right\|^2$.

Przypomnienie: $\left\langle s_1, s_2 \right\rangle \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\,s_2(t)\,dt$

$\left\langle s, s \right\rangle \overset{df}{=} \left\| s \right\|^2$ w przestrzeni unitarnej

Skalowanie i przesunięcie

Zachowanie skalowania $\quad s(at) \quad \Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{s}(a\tau)$

bo
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(at)}{\tau-t}\,dt=\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(a\theta/a)}{\tau-\theta/a}\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\theta)}{a\tau-\theta}\,d\theta=\overleftrightarrow{s}(a\tau)$$

$$t=\theta/a$$

Zachowanie przesunięcia $\quad s(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{s}(\tau-t_0)$

bo
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(t-t_0)}{\tau-t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\theta)}{\tau-t_0-\theta}\,d\theta=\overleftrightarrow{s}(\tau-t_0)$$

$$t=\theta+t_0$$

Zachowanie autokorelacji

Równość funkcji autokorelacji

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t-t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{s}(\tau)\, \overleftrightarrow{s}(\tau-t_0)\, d\tau$$

wynika z zachowania iloczynu skalarnego $\left\langle \overleftrightarrow{s}_1, \overleftrightarrow{s}_2 \right\rangle = \left\langle s_1, s_2 \right\rangle$

i zachowania przesunięcia $\quad s(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{s}(\tau-t_0)$

Ortogonalność sygnału i jego transformaty Hilberta

Wykorzystując własności transformacji Fouriera możemy wykonać przekształcenia

Całka z nieparzystej

$$\langle s, \overset{\leftrightarrow}{s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\overset{\leftrightarrow}{s}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)\,\hat{\overset{\leftrightarrow}{s}}^{*}(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\,\hat{s}(f)\right]^{*} df = j\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(f)\left|\hat{s}(f)\right|^{2} df = 0$$

Zachowanie iloczynu skalarnego transformacji Fouriera

Funkcja nieparzysta razy parzysta

Czyli sygnał jest ortogonalny do jego transformaty Hilberta, tzn.

$$\langle s, \overset{\leftrightarrow}{s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\overset{\leftrightarrow}{s}(t)\,dt = 0$$

Przykłady transformat Hilberta

$$\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi\,\tau}$$

$$\operatorname{sgn}\left[\cos(2\pi f_0 t)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\pi\, f_0\tau + \pi/4\right)\right|$$

$$\operatorname{sgn}\left[\sin(2\pi f_0 t)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\pi f_0\tau\right)\right|$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad -\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2\pi f_0 \tau)$$

$$\frac{\sin(at)}{at} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2(a\tau/2)}{a\tau/2} = \frac{1-\cos(a\tau)}{a\tau}$$

Dalsze przykłady transformat Hilberta

$$\text{const} \quad \Leftrightarrow \quad 0$$

$$e^{2\pi j f_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad -j\,\mathrm{sgn}(f_0)e^{2\pi j f_0 \tau} = \mathrm{sgn}(f_0)e^{j(2\pi f_0 \tau - 0,5\pi)}$$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{t+0,5}{t-0,5}\right|$$

$$\frac{a}{t^2 + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tau}{\tau^2 + a^2}$$

Twierdzenie Bedrosiana

Załóżmy, że mamy dwa sygnały, przy czym widmo jednego z nich mieści się w zakresie niskich częstotliwości a widmo drugiego w zakresie częstotliwości wysokich , tzn. są mają rozdzielne nośniki

$$\left|\hat{s}_1(f)\right| = 0 \quad \text{dla} \quad |f| > f_g$$

$$\left|\hat{s}_2(f)\right| = 0 \quad \text{dla} \quad |f| < f_g$$

to wtedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_1(t)\,s_2(t)}{\tau - t}\,dt = \frac{s_1(\tau)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_2(t)}{\tau - t}\,dt = s_1(\tau)\,\vec{s}_2(\tau)$$

czyli tylko sygnał wysokiej częstotliwości z iloczynu wysokiej i niskiej częstotliwości ulega transformacji Hilberta.

Przykład zastosowania twierdzenia Bedrosiana

Niech będzie dany sygnał powstały w wyniku modulacji amplitudowej

$$s_{\mathrm{mod}}(t) = s(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Poddając go transformacji Hilberta otrzymujemy

$$\overleftrightarrow{s}_{\mathrm{mod}}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)}{\tau - t}\,dt = s(\tau)\sin\left(2\pi f_0 \tau + \varphi\right)$$

Zadanie

Jaka jest transformata Hilberta dla pochodnej delty Diraca?

Rozwiązanie. Wiemy, że

$$\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi\,\tau}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\overleftrightarrow{s}(\tau)$$

czyli

$$\frac{d}{dt}\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\pi\tau^2}$$

Zależność pomiędzy transformatami Hartley'a i Hilberta

Z transformaty Hartley'a $\overset{\frown}{s}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\left(\cos(2\pi f t) + \sin(2\pi f t)\right) dt$

można obliczyć transformatę Hilberta $\overleftrightarrow{s}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\tau - t}\, dt$

posługując się wzorem

$$\overleftrightarrow{s}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f)\, \overset{\frown}{s}(-f) \left[\sin(2\pi f \tau) + \cos(2\pi f \tau)\right] df$$

Przypomnienie

$$\hat{s}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi j/4} \overset{\frown}{s}(f) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi j/4} \overset{\frown}{s}(-f) \qquad \overleftrightarrow{s}(\tau) = -j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f)\, \hat{s}(f)\, e^{2\pi j f \tau} df$$

Dyskretna transformacja Hilberta

$$\{s(n)\}_{n=0}^{N-1} \Leftrightarrow \{\overleftrightarrow{s}(k)\}_{k=0}^{N-1}$$

$$\overleftrightarrow{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_{k-n}\, s(n)$$

gdzie

$$h_n = \begin{cases} \dfrac{2}{N}\sin^2(0{,}5\pi\, n)\operatorname{ctg}(\pi\, n / N) & \text{dla} \quad N \text{ parzystego} \\ \dfrac{2}{N}\left[1 - \cos(\pi\, n)\operatorname{ctg}(\pi\, n / N) / \cos(\pi\, n / N)\right] & \text{dla} \quad N \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

Dyskretna transformacja Hilberta

$$\overleftrightarrow{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_{k-n}\, s(n)$$

Powyższy wzór jest złożeniem trzech operacji:

- wyznaczeniu DFT,
- dyskretnej wersji $\hat{\overleftrightarrow{s}}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,\hat{s}(f)$,
- wyliczeniu IDFT.

co można zapisać w postaci schematu

$$s(n) \overset{DFT}{\Rightarrow} \hat{s}(i) \Rightarrow -j\,\mathrm{sgn}(N/2-i)\,\mathrm{sgn}(i)\,\hat{s}(i) = \hat{\overleftrightarrow{s}}(i) \overset{DFT^{-1}}{\Rightarrow} \overleftrightarrow{s}(k)$$

Zachowanie energii

$$\sum_{n=0}^{N-1} s^2(n) = \sum_{=0}^{N-1} \left|\hat{s}(k)\right|^2 \neq \sum_{i=0}^{N-1} \overleftrightarrow{s}^2(i)$$

Oznacza to, że DFT zachowuje energię a dyskretna transformacja Hilberta **na ogół** energii nie zachowuje.

2-D transformacja Hilberta

$$\vec{s}(\xi_x,\xi_y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(x,y)}{(\xi_x-x)(\xi_y-y)}\,dxdy$$

Transformacja odwrotna

$$s(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{s}(\xi_x,\xi_y)}{(\xi_x-x)(\xi_y-y)}\,d\xi_x d\xi_y$$

Całki są liczone w sensie wartości głównych.

Cząstkowe transformacje Hilberta

$$\overleftarrow{s}(\xi_x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x, y)}{(\xi_x - x)}\, dx$$

$$\vec{s}(x, \xi_y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x, y)}{(\xi_y - y)}\, dy$$

Przykłady 2-D transformat Hilberta

Sygnały i transformaty Hilberta: całkowite oraz cząstkowe

$$\sin(2\pi f_1 \xi_x)\cos(2\pi f_2 y))$$

$$\cos(2\pi f_1 x)\cos(2\pi f_2 y) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2\pi f_1 \xi_x)\sin(2\pi f_2 \xi_y)$$

$$\cos(2\pi f_1 x)\sin(2\pi f_2 \xi_y))$$

$$-\cos(2\pi f_1 \xi_x)\sin(2\pi f_2 y))$$

$$\sin(2\pi f_1 x)\sin(2\pi f_2 y) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\pi f_1 \xi_x)\cos(2\pi f_2 \xi_y)$$

$$-\sin(2\pi f_1 x)\cos(2\pi f_2 \xi_y))$$

Przykłady 2-D transformat Hilberta

Sygnały i transformaty Hilberta: całkowite oraz cząstkowe

$$\sin\left(2\pi(f_1x+f_2y)\right) \Leftrightarrow -\sin\left(2\pi(f_1\xi_x+f_2\xi_y)\right) \qquad \begin{matrix} -\cos\left(2\pi(f_1\xi_x+f_2y)\right) \\ -\cos\left(2\pi(f_1x+f_2\xi_y)\right) \end{matrix}$$

$$\cos\left(2\pi(f_1x+f_2y)\right) \Leftrightarrow -\cos\left(2\pi(f_1\xi_x+f_2\xi_y)\right) \qquad \begin{matrix} \sin\left(2\pi(f_1\xi_x+f_2y)\right) \\ \sin\left(2\pi(f_1x+f_2\xi_y)\right) \end{matrix}$$