



ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA SYGNAŁÓW

Spis treści

1. Dyskretne widmo sygnałów okresowych
2. Związek między szeregiem i transformacją Fouriera
3. Warunki istnienia i odwracalności transformacji Fouriera
4. Widma sygnałów
5. Własności transformacji Fouriera
6. Przykład transformacji Fouriera
7. Uogólniona transformacja Fouriera

Baron Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830)



Z wyróżnieniem ukończył szkołę wojskową w Auxerre.

Został nauczycielem Ecole Normal a potem Politechniki w Paryżu.

Napoleon mianował go zarządcą Dolnego Egiptu w wyniku ekspedycji z 1798 roku.

Po powrocie do Francji został prefektem w Grenoble. Baronem został w 1809 roku. Ostatecznie w 1816 roku został sekretarzem Akademii Nauk a następnie jej członkiem w 1817.

W okresie od 1808 roku do 1825 roku napisał 21 tomowy Opis Egiptu.

Równaniem ciepła zainteresował się w 1807 roku. W opublikowanej w 1822 roku pracy pokazał jak szereg zbudowany z sinusów i kosinusów można wykorzystać do analizy przewodnictwa ciepła w ciałach stałych. Nad szeregami trygonometrycznymi pracował do końca życia, rozszerzając tę problematykę na transformację całkową.



Dyskretne widmo sygnałów okresowych

Dla sygnałów spełniających dwa warunki:

$$s \in C(-\infty, +\infty)$$

$$s(t) = s(t + T)$$

można utworzyć szereg

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_T t - \varphi_n)$$

gdzie $f_T = 1/T$ oraz

$$c_0 = f_T \int_0^T s(t) dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

widmo amplitudowe

$$\varphi_n = \arctan(b_n/a_n)$$

widmo fazowe

$$a_n = 2f_T \int_0^T s(t) \cos(2\pi n f_T t) dt$$

$$b_n = 2f_T \int_0^T s(t) \sin(2\pi n f_T t) dt$$



Od zespolonego szeregu do transformacji Fouriera

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{2\pi j n t / T}$$

+

$$T = 1 / f_T$$

+

$$s_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2\pi j n t / T} dt$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{2\pi j n f_T t}$$

gdzie

$$s_n = f_T \int_0^{1/f_T} s(t) e^{-2\pi j n f_T t} dt$$

Po zmianie granic całkowania

$$s_n = f_T \int_{-\frac{1}{2f_T}}^{\frac{1}{2f_T}} s(t) e^{-2\pi j n f_T t} dt$$

Niech $n f_T \Rightarrow f$

czyli $n \in (-\infty, \infty)$ $f_T \rightarrow 0$

Dodatkowo niech $s_n = f_T \hat{s}(f)$



Od szeregu do transformacji Fouriera

Podstawiając $s_n = f_T \hat{s}(f)$ oraz $nf_T = f$

$$s_n = f_T \int_{-\frac{1}{2f_T}}^{\frac{1}{2f_T}} s(t) e^{-2\pi j n f_T t} dt$$

otrzymujemy

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad \text{dla } f_T \rightarrow 0$$

Ze wzoru $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}(n f_T) e^{2\pi j n f_T t} f_T$ oznaczając $f_T = df$ bo $f_T \rightarrow 0$

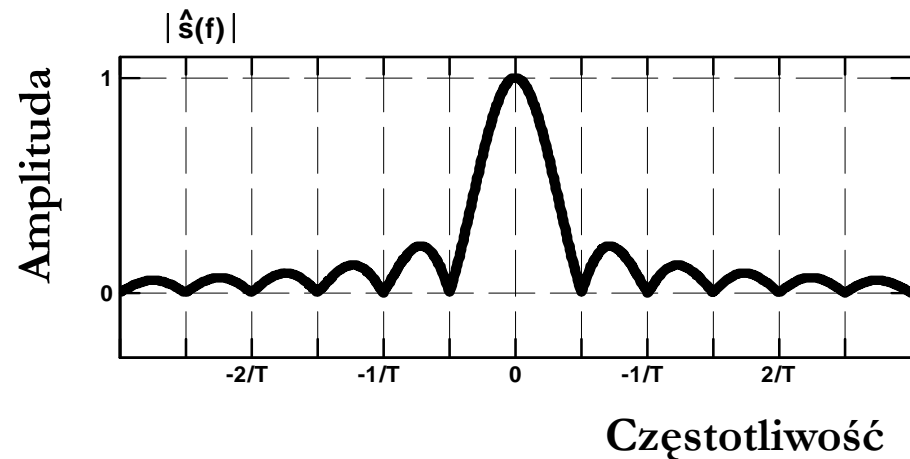
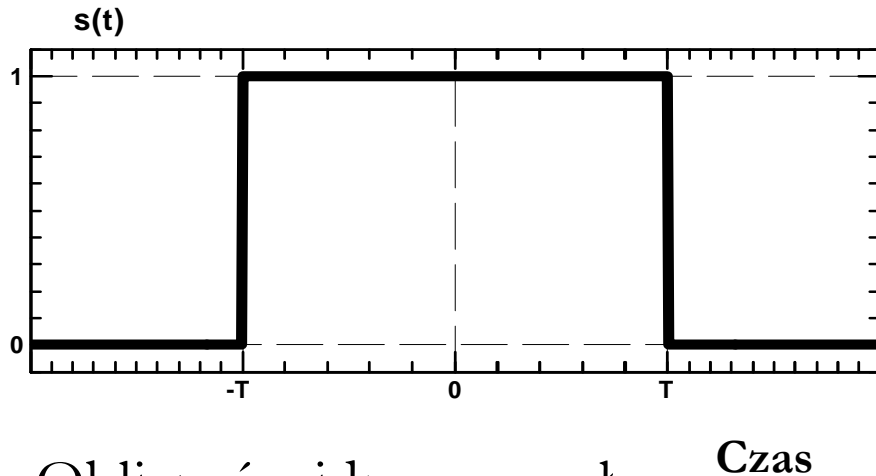
otrzymujemy

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi j f t} df$$

Bramka prostokątna i jej widmo Fouriera

Sygnal

Widmo jest funkcją rzeczywistą



Obliczyć widmo sygnału

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{dla } t < -T \text{ i } t > T \end{cases}$$

Posługując się definicją transformacji Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_{-T}^T e^{-2\pi jft} dt = -\frac{1}{2\pi j f} e^{-2\pi jft} \Big|_{-T}^T = \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}$$



Definicja transformacji Fouriera

$$s(t) \leftrightarrow \hat{s}(f)$$

Ogólnie

$$\hat{s}(f) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-\beta j f t} dt$$

$$s(t) = \frac{\beta}{2\alpha\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) e^{\beta j f t} df$$

Dla nas $\alpha = 1$ i $\beta = 2\pi$

Często $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ lub $\alpha = 1/\sqrt{2\pi}$ i $\beta = 1$



Warunki odwracalności transformacji Fouriera

$$s \in L^1(\mathfrak{R}) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

Twierdzenie 1.

Niech dany będzie sygnał $s \in L^1(\mathfrak{R})$ taki, że jego transformata Fouriera $\hat{s} \in L^1(\mathfrak{R})$, wtedy

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jft} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi jft} dt df$$

w każdym punkcie t dla którego sygnał s jest ciągły. ■

Twierdzenie 2.

$$s \in L^2(\mathfrak{R}) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty$$

Jeżeli sygnał $s \in L^1(\mathfrak{R}) \cap L^2(\mathfrak{R})$

to wtedy jego transformata $\hat{s} \in L^2(\mathfrak{R})$. ■



Widma sygnałów

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi jft} dt$$

$$\hat{s}(f) = \hat{r}(f) + j\hat{i}(f) = |\hat{s}(f)| e^{j\varphi(f)} = A(f) e^{j\theta(f)} \quad - \text{widmo zespolone,}$$

$|\hat{s}(f)|$, $A(f)$ - *widma amplitudowe*,

$\varphi(f)$, $\theta(f)$ - *widma fazowe*,

$\hat{r}(f)$ - *widmo rzeczywiste*,

$\hat{i}(f)$ - *widmo urojone*.

$$|\hat{s}(f)| = \sqrt{\hat{r}^2(f) + \hat{i}^2(f)}$$

$$\theta(f) = \text{arctg} \left(\frac{\hat{i}(f)}{\hat{r}(f)} \right)$$

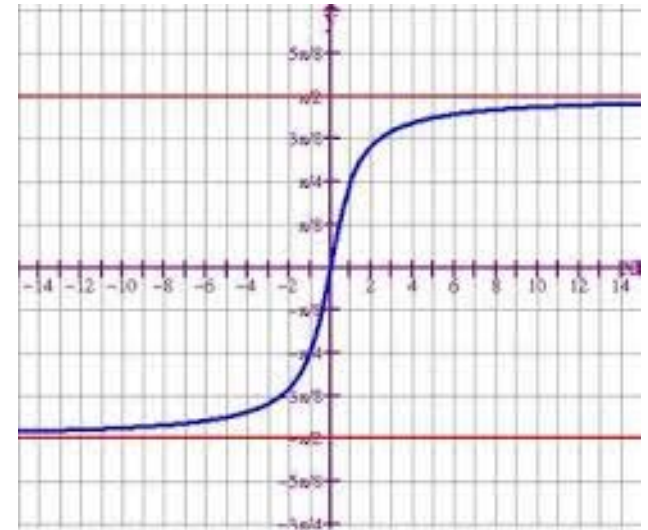


Widma sygnałów

$$\theta(f) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\hat{i}(f)}{\hat{r}(f)}\right)$$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ zatem $-\pi/2 \leq \theta(f) \leq \pi/2$

$$A(f) = \begin{cases} \frac{\hat{r}^2(f) + \hat{i}^2(f)}{\hat{i}(f)} \sin(\theta(f)) & \text{dla } \theta(f) \neq 0 \\ \hat{r}(f) & \text{dla } \theta(f) = 0 \end{cases}$$



$$\varphi(f) = \arg(\hat{s}(f)) = \begin{cases} \theta(f) & \text{dla } A(f) \geq 0 \\ \theta(f) \pm \pi & \text{dla } A(f) < 0 \end{cases}$$

$$-\pi \leq \varphi(f) \leq \pi$$

Wzajemna jednoznaczność między widmem $\hat{s}(f)$ a widmami amplitudowymi i fazowymi:

$$|A(f)| = |\hat{s}(f)|$$

lub $|\hat{s}(f)|$ razem z $\varphi(f)$
 $A(f)$ razem z $\theta(f)$



Parzystość widma rzeczywistego i amplitudowego oraz nieparzystość widma urojonego i fazowego

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt = \hat{r}(f) + j \hat{i}(f)$$

gdzie

$$\hat{r}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

$$\hat{i}(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

$$\hat{r}(-f) = \hat{r}(f)$$

$$\hat{i}(-f) = -\hat{i}(f)$$

$$|\hat{s}(f)| = \sqrt{\hat{r}^2(f) + \hat{i}^2(f)}$$

$$\theta(f) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\hat{i}(f)}{\hat{r}(f)} \right)$$

$$|\hat{s}(f)| = |\hat{s}(-f)|$$
$$\theta(-f) = -\theta(f)$$

Własności widm

$$|\hat{s}(f)| = \sqrt{\hat{r}^2(f) + \hat{i}^2(f)}$$

$$\theta(f) = \text{arc tg}(\hat{i}(f)/\hat{r}(f))$$

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)[\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt = \hat{r}(f) + j\hat{i}(f)$$

Dla sygnału $s(t) = s(-t)$

otrzymujemy

$$\hat{s}(f) = \hat{r}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Dla sygnału $s(t) = -s(-t)$

otrzymujemy

$$\hat{s}(f) = j\hat{i}(f) = -2j \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$



Transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym

Addytywność
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [s_1(t) + s_2(t)] e^{-2\pi j f t} dt = \hat{s}_1(f) + \hat{s}_2(f)$$

Jednorodność
$$\int_{-\infty}^{+\infty} a s(t) e^{-2\pi j f t} dt = a \hat{s}(f)$$

Zatem
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a s_1(t) + b s_2(t)] e^{-2\pi j f t} dt = a \hat{s}_1(f) + b \hat{s}_2(f)$$



Zachowanie iloczynu skalarnego

Twierdzenie Rayleigha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(f) \overline{\hat{s}_2(f)} df$$

Wynika stąd

$$\langle s_1, s_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \rangle = 0$$



Zachowanie energii

Twierdzenie Parsevala

$$\|\hat{s}\|_{L^2}^2 = \|s\|_{L^2}^2$$

zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(f)|^2 df$$

Zachowanie odległości

Skoro

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(f)|^2 df}$$

to przyjmując

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t)$$

otrzymujemy

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}_1(f) - \hat{s}_2(f)|^2 df}$$

bo dla pary $s(t) \leftrightarrow \hat{s}(f)$

dzięki liniowości transformacji Fouriera $\hat{s}(f) = \hat{s}_1(f) - \hat{s}_2(f)$

Dualność transformacji Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

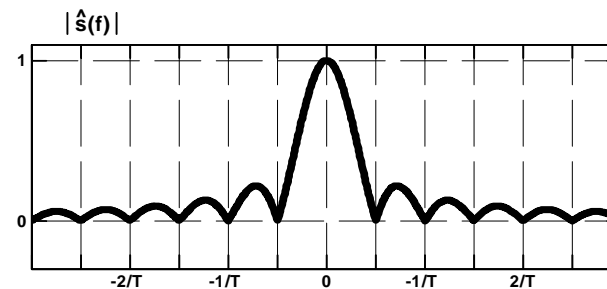
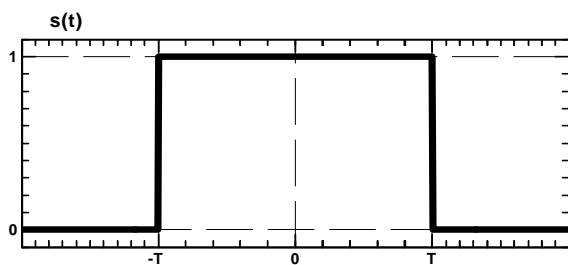
$$\hat{\hat{s}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt df$$

Otrzymujemy zależność zwaną dualnością transformacji Fouriera

$$\hat{\hat{s}}(\tau) = s(-\tau)$$

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt \Leftrightarrow s(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

Np.





Początkowa wartość transformaty Fouriera

Podstawiając $f = 0$ do przekształcenia

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

otrzymujemy

$$\hat{s}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

Podobnie, podstawiając $t = 0$ do przekształcenia odwrotnego otrzymujemy

$$s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi j f 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) df$$

Zmiana skali czasu sygnału

$$s(t) \leftrightarrow \hat{s}(f)$$

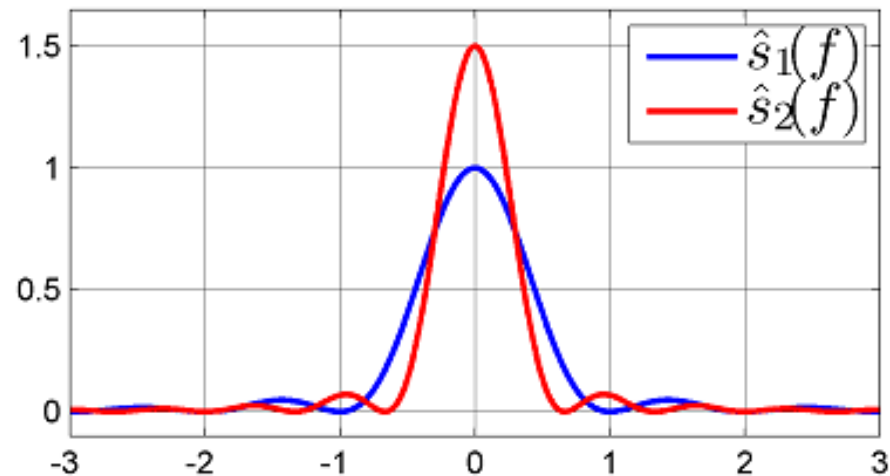
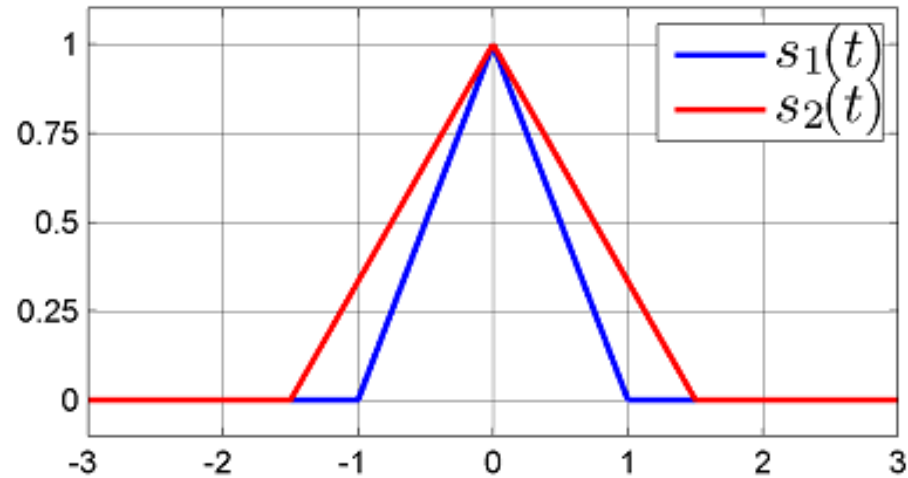
$$s(at) \leftrightarrow |a|^{-1} \hat{s}(f/a)$$

$$s_1(t) = \Lambda(t)$$

$$s_2(t) = \Lambda\left(\frac{2}{3}t\right)$$

$$\hat{s}_1(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$$

$$\hat{s}_2(f) = \frac{3}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi f}{2}\right)}{\pi f} \right)^2$$





Przesunięcie w dziedzinie czasu i częstotliwości

Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$s(t - t_0) \leftrightarrow \hat{s}(f) e^{-2\pi j f t_0}$$

bo $\int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-2\pi j f t} dt$ po podstawieniu $\tau = t - t_0$ równa się

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2\pi j f t_0} e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$s(t) e^{2\pi j f_0 t} \leftrightarrow \hat{s}(f - f_0)$$

$$s(t) e^{-2\pi j f_0 t} \leftrightarrow \hat{s}(f + f_0)$$

Sumując obustronnie otrzymujemy

$$2s(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \hat{s}(f - f_0) + \hat{s}(f + f_0)$$

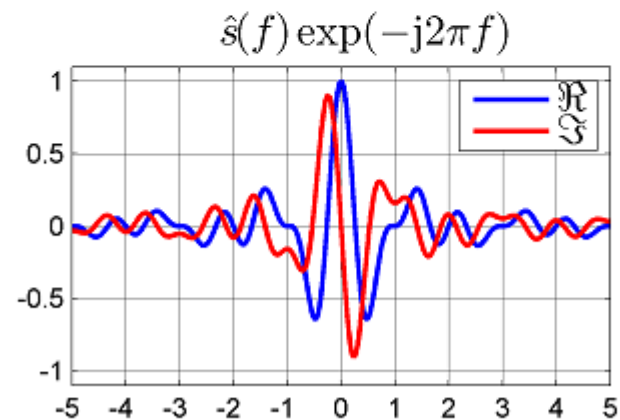
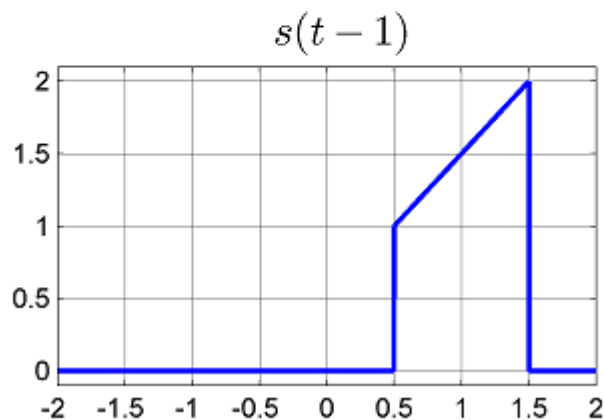
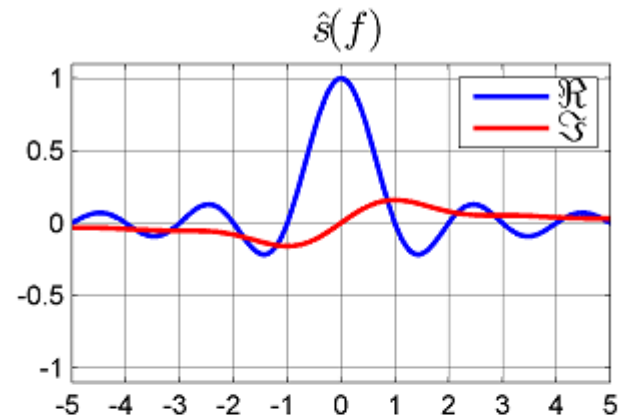
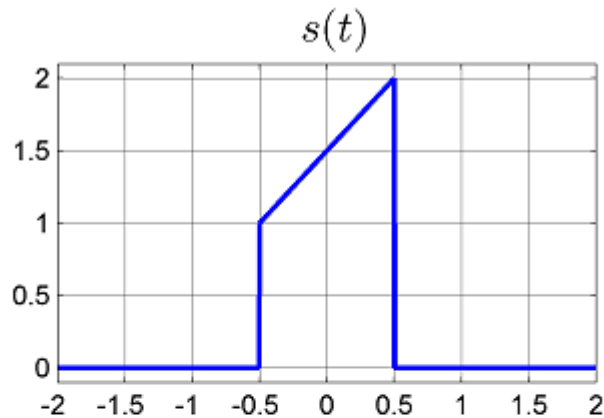
Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$s_1(t) = \left(t + \frac{3}{2}\right) \cdot \Pi(t)$$

$$s_2(t) = s_1(t-1) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi(t-1)$$

$$\hat{s}_1(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} + \left(\frac{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} - 1}{j2\pi f} \right)$$

$$\hat{s}_2(f) = \hat{s}_1(f) \cdot \exp(-j2\pi f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} + \left(\frac{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} - 1}{j2\pi f} \right) \right) \cdot \exp(-j2\pi f)$$



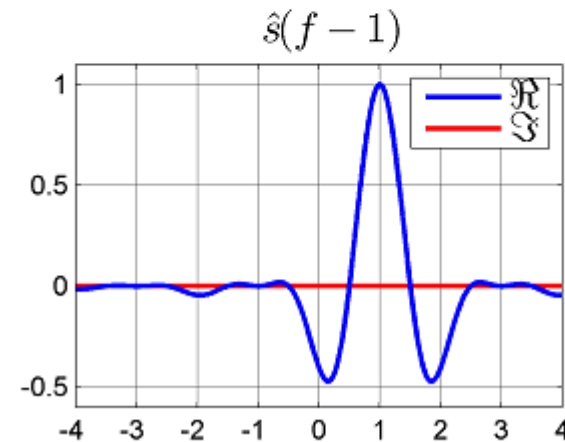
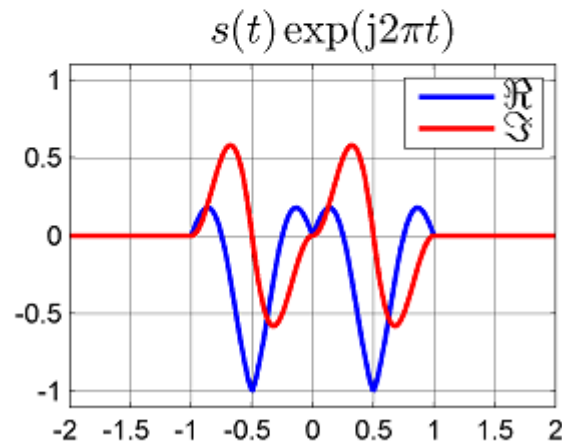
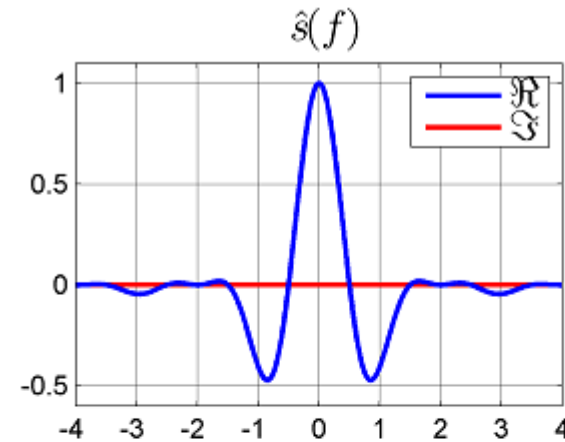
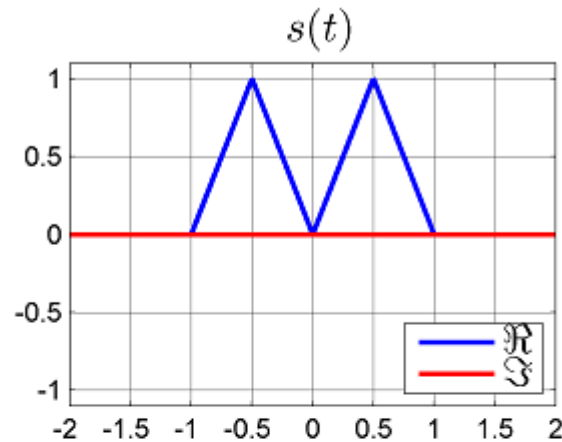
Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$s_1(t) = \Lambda(2t + 1) + \Lambda(2t - 1)$$

$$s_2(t) = (\Lambda(2t + 1) + \Lambda(2t - 1)) \cdot \exp(j2\pi t)$$

$$\hat{s}_1(f) = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi f}{2}\right)}{\pi f} \cdot \cos(\pi f)$$

$$\hat{s}_2(f) = \hat{s}_1(f - 1) = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi(f - 1)}{2}\right)}{\pi(f - 1)} \cdot \cos(\pi(f - 1))$$





Różniczkowanie w dziedzinie czasu

Jeżeli :

- sygnał $s(t)$ i jego kolejne pochodne aż do rzędu $n-1$ są ciągłe,
- pochodna rzędu n istnieje prawie wszędzie,
- sygnał i wszystkie jego pochodne aż do rzędu n posiadają transformaty Fouriera, czyli dostatecznie szybko dążą do zera dla $t \rightarrow \pm\infty$

to

$$\frac{d^n s(t)}{dt^n} \leftrightarrow (2\pi jf)^n \hat{s}(f)$$



Różniczkowanie w dziedzinie czasu

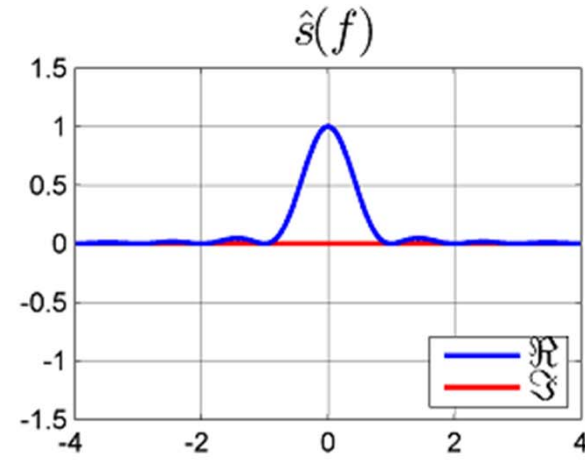
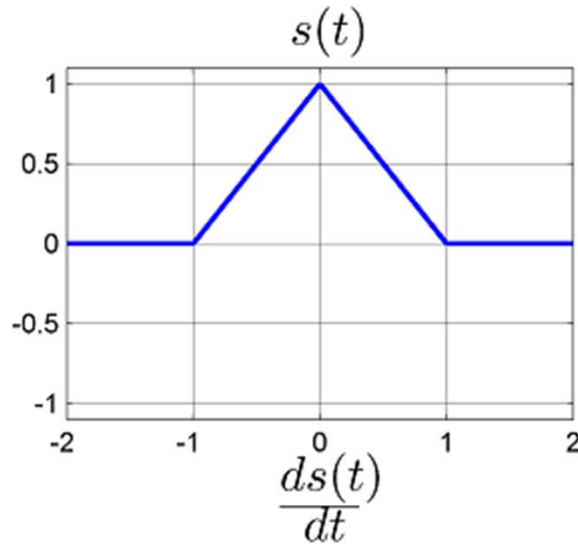
$$s_1(t) = \Lambda(t)$$

$$s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} = \Pi(t+1) - \Pi(t-1)$$

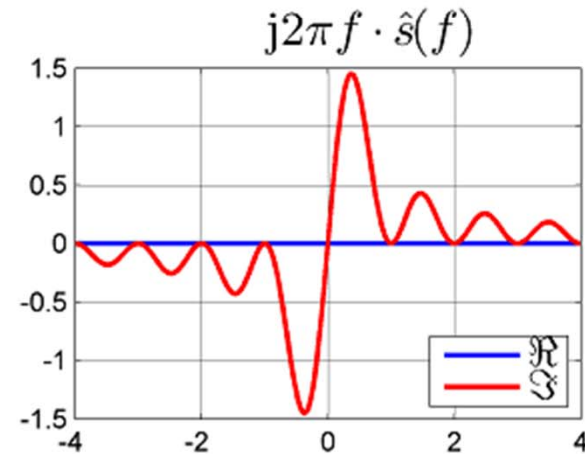
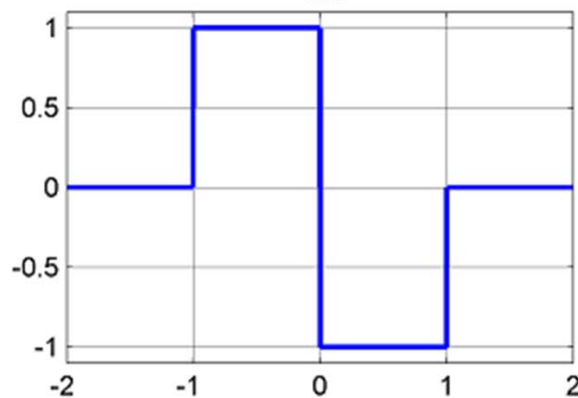
$$\hat{s}_1(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$$

$$\hat{s}_2(f) = \frac{j2 \sin^2(\pi f)}{\pi f}$$

sygnał parzysty



sygnał nieparzysty





Ograniczone nośniki

Niech sygnał ma ograniczony nośnik.

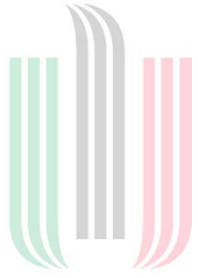
$$\hat{s}(f) = \int_0^T s(t) e^{-2\pi j f t} dt \qquad \frac{d\hat{s}(f)}{df} = -2\pi j \int_0^T t s(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\frac{d^n \hat{s}(f)}{df^n} = (-2\pi j)^n \int_0^T t^n s(t) e^{-2\pi j f t} dt \qquad \left| \frac{d^n \hat{s}(f)}{df^n} \right| \leq 2^n \pi^n T^n \int_0^T |s(t)| dt = 2^n \pi^n T^n \|s\|_{L^1}$$

Oznacza to, że widmo $\hat{s}(f)$ jest funkcją analityczną.

Analityczna funkcja - funkcja różniczkowalna, której pochodne są również różniczkowalne. Oznacza to, że funkcja analityczna zmiennej zespolonej może być lokalnie (tzn. w pewnym otoczeniu dowolnego punktu f_0) przedstawiona w postaci szeregu potęgowego

$$\hat{s}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n \hat{s}}{df^n} \right|_{f=f_0} \frac{(f - f_0)^n}{n!}$$



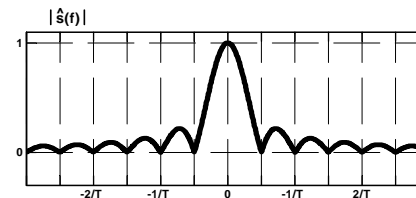
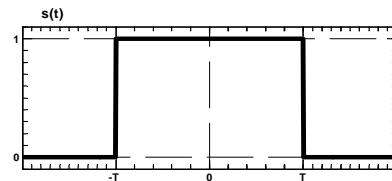
AGH

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Oznacza to, że widmo może być lokalnie, tzn. w pewnym otoczeniu dowolnego punktu f_0 , przedstawione w postaci szeregu potęgowego

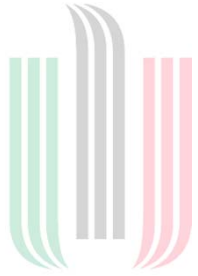
$$\hat{s}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \hat{s}}{df^n} \Big|_{f=f_0} \frac{(f - f_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n$$

czyli nośnik widma nie może być ograniczony!



Impuls prostokątny i jego widmo amplitudowe.

Postępując podobnie można udowodnić, że jeżeli nośnik widma jest ograniczony, to nośnik sygnału nie może być ograniczony.



Nieoznaczoność Heinsenberga

AGH Środek rozłożenia energii sygnału

$$t_* = \|s\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt$$

Środek rozłożenia energii widma sygnału

$$f_* = \|s\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} f |\hat{s}(f)|^2 df$$

Unormowane kwadraty odchyleń standardowych dla rozkładów energii, czyli wariancje

$$\mathcal{G}_t^2 = \|s\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_*)^2 |s(t)|^2 dt \quad \mathcal{G}_f^2 = \|s\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_*)^2 |\hat{s}(f)|^2 df$$

Zasada Heinsenberga $\mathcal{G}_t \mathcal{G}_f \geq 0,5$



Różniczkowanie w dziedzinie częstotliwości

$$\hat{s}(f) = \hat{r}(f) + j\hat{i}(f)$$

$$\hat{r}(-f) = \hat{r}(f) \quad \hat{i}(-f) = -\hat{i}(f)$$

Obustronnie różniczkując otrzymujemy

$$(-1)^n \frac{d^n \hat{r}(-f)}{d(-f)^n} = \frac{d^n \hat{r}(f)}{df^n} \quad (-1)^n \frac{d^n \hat{i}(-f)}{d(-f)^n} = -\frac{d^n \hat{i}(f)}{df^n}$$

Czyli parzyste pochodne zachowują parzystość części rzeczywistej i nieparzystość części urojonej. Czyli sygnał będzie miał wartości rzeczywiste. W przeciwnym wypadku będzie czysto urojony.

Można udowodnić, że

$$(-2\pi jt)^n s(t) \leftrightarrow \frac{d^n \hat{s}(f)}{df^n}$$

Warunek wystarczający $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n s(t)| dt < \infty$



Splot w dziedzinie czasu

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \quad \text{gdy} \quad s_1, s_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$$

Splot oznaczamy $s_1(t) * s_2(t)$

Przemienność splotu

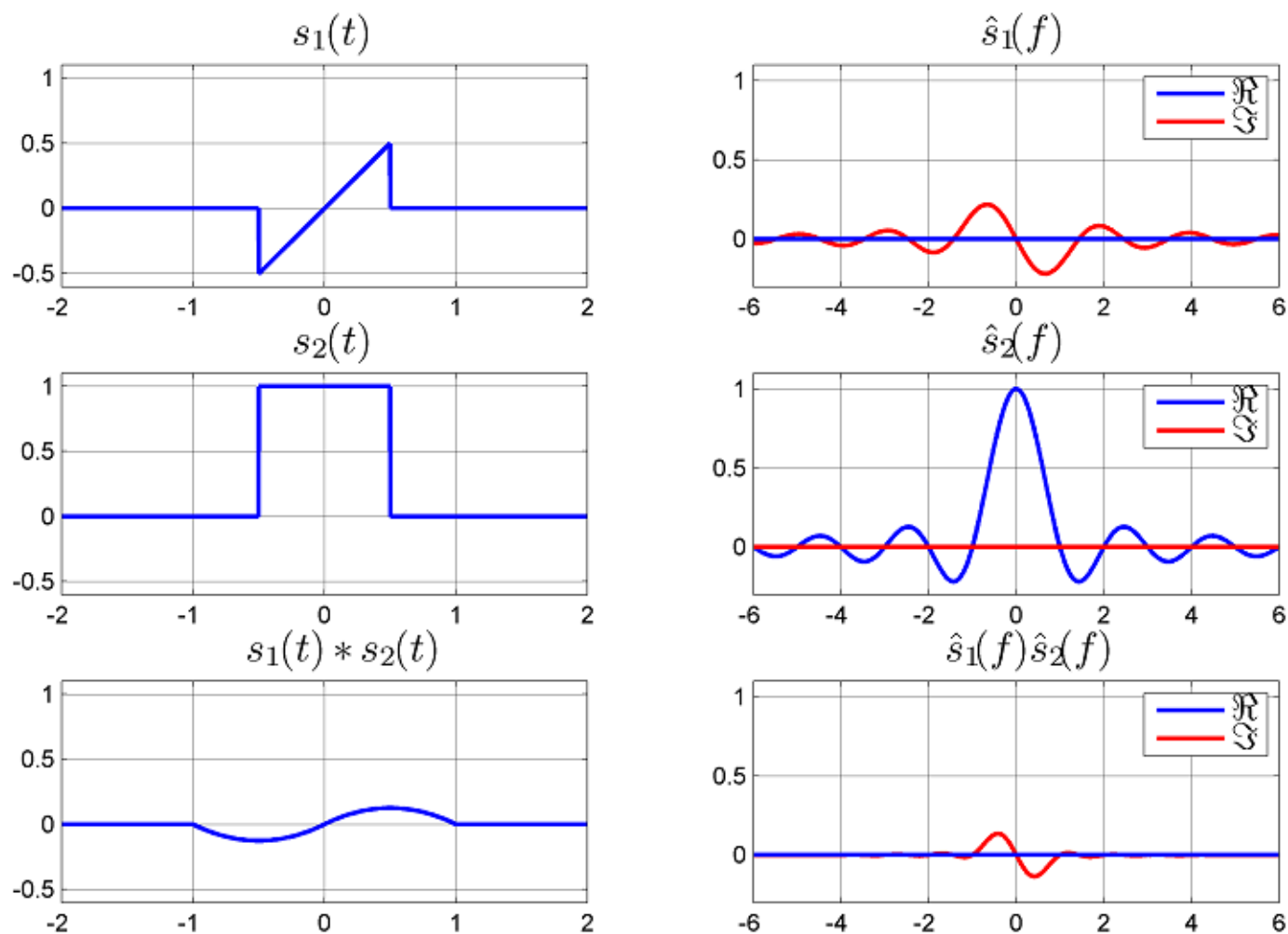
$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(\theta) s_1(t - \theta) d\theta = s_2(t) * s_1(t)$$

Gdy $s_1(t) = 0$ i $s_2(t) = 0$ dla $t < 0$ to $s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$

Musi być $t - \tau > 0$ aby $s_2(t - \tau)$ nie było równe zero

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) dt \quad \leftrightarrow \quad \hat{s}(f) = \hat{s}_1(f) \hat{s}_2(f)$$

Przykład splotu w dziedzinie czasu





Wzory do rysunków

Splatanie sygnały

$$s_1(t) = t \cdot \Pi(t) \leftrightarrow \hat{s}_1(f) = \frac{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} - \cos(\pi f)}{j2\pi f}$$

$$s_2(t) = \Pi(t) \leftrightarrow \hat{s}_2(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

bo $t s(t) \leftrightarrow \frac{d\hat{s}(f)}{df} \frac{1}{-2\pi j}$

Splot w dziedzinie czasu i jego widmo

$$s_1(t) * s_2(t) = \left(\frac{t+t^2}{2}\right) \cdot \Pi\left(t+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{t-t^2}{2}\right) \cdot \Pi\left(t-\frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \hat{s}_1(f) \cdot \hat{s}_2(f) = \frac{\left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 - \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}}{j2\pi f}$$



Splot w dziedzinie częstotliwości i całkowanie w dziedzinie czasu

Splot w dziedzinie częstotliwości

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \hat{s}_1(f)*\hat{s}_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(g)\hat{s}_2(f-g) dg$$

Całkowanie w dziedzinie czasu

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi jf} \hat{s}(f)$$

Warunek $\hat{s}(0) = 0 \iff \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0$



Impuls paraboliczny

Dla sygnału

$$s(t) = \begin{cases} 6t^2 - 6t + 1 & \text{dla } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t < -1 \text{ i } t > 1 \end{cases}$$

znaleźć składową parzystą i nieparzystą oraz wyznaczyć ich widma.



Rozłożenie na część parzystą i nieparzystą

Każdy sygnał można jednoznacznie rozłożyć na sumę

$$s = s_p + s_n$$

gdzie

sygnał parzysty $s_p(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)]$

sygnał nieparzysty $s_n(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)]$

tzn.
$$\begin{cases} s_n(t) = -s_n(-t) \\ s_p(t) = s_p(-t) \end{cases}$$

Z teoretycznych rozważań wiemy, że **sygnał parzysty ma widmo czysto rzeczywiste** a **nieparzysty widmo czysto urojone**.

Dla rozważanego przykładu otrzymujemy
$$\begin{cases} s_p(t) = 6t^2 + 1 \\ s_n(t) = -6t \end{cases}$$

Widmo części parzystej

$$\hat{s}_p(f) = \int_{-1}^1 (6t^2 + 1) e^{-2\pi jft} dt$$

Posługując się tożsamością

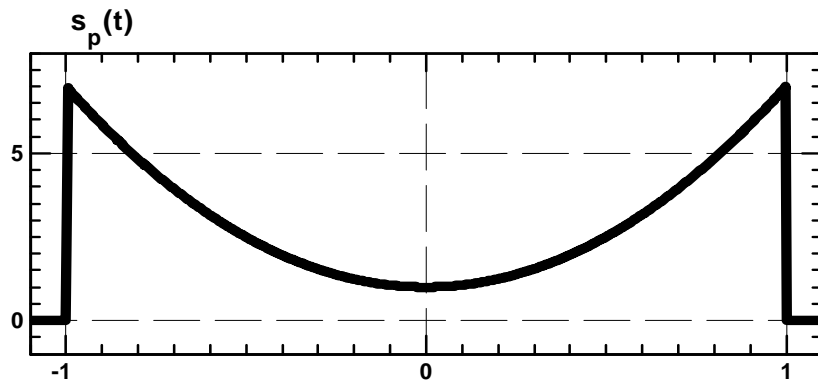
$$\int t^2 e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^3} (a^2 t^2 - 2at + 2) \quad \text{gdzie} \quad a = -2\pi jf$$

otrzymujemy widmo czysto rzeczywiste

$$\hat{s}_p(f) = \frac{6 \cos(2\pi f)}{\pi^2 f^2} + \frac{1}{\pi f} \left(7 - \frac{3}{\pi^2 f^2} \right) \sin(2\pi f)$$

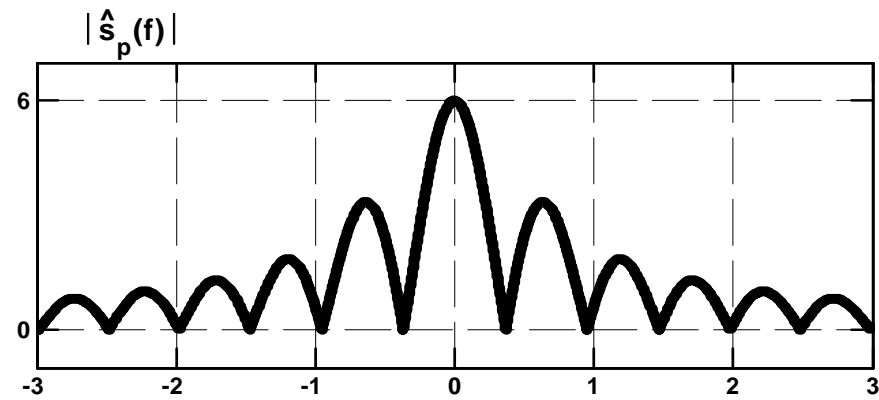
Prezentacja części parzystej

Sygnal



Czas

Widmo
amplitudowe



Częstotliwość



Widmo części nieparzystej

$$\hat{s}_n(f) = -6 \int_{-1}^1 t e^{-2\pi j f t} dt$$

Posługując się tożsamością

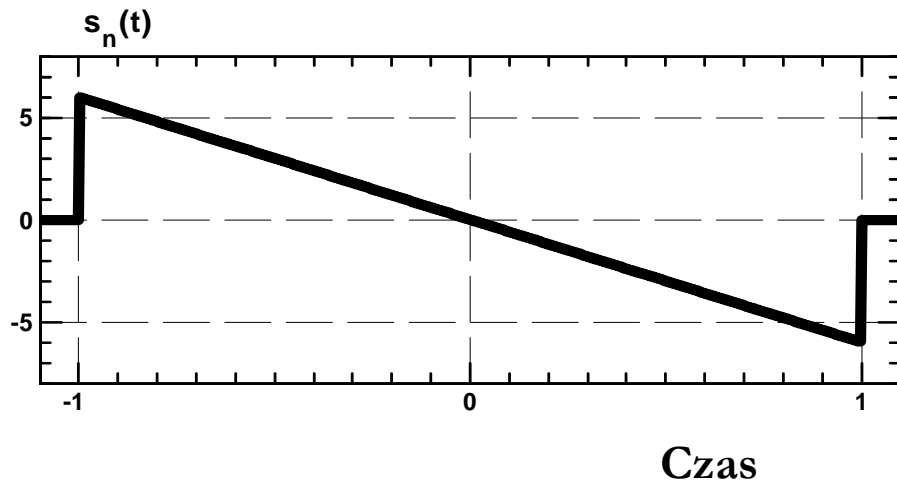
$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) \quad \text{gdzie} \quad a = -2\pi j f$$

otrzymujemy widmo czysto urojone

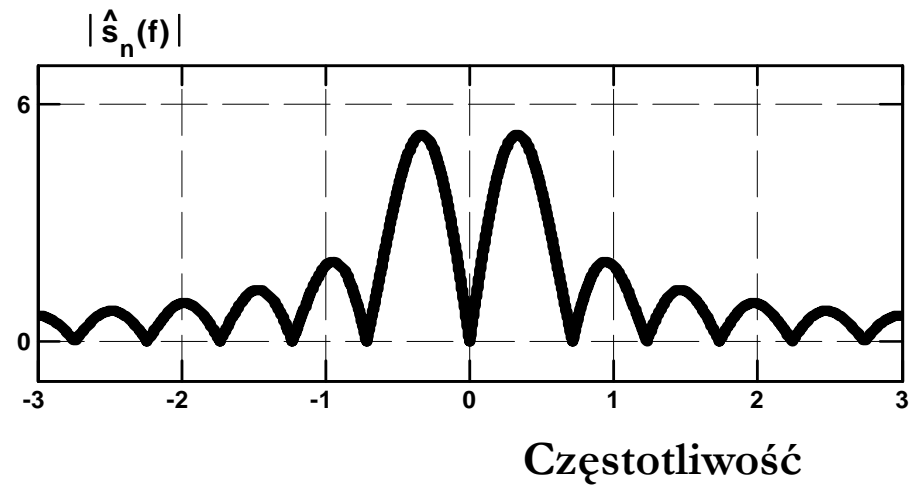
$$\hat{s}_n(f) = \frac{j}{\pi f} \left(\cos(2\pi f) - \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} \right)$$

Prezentacja części nieparzystej

Sygnal

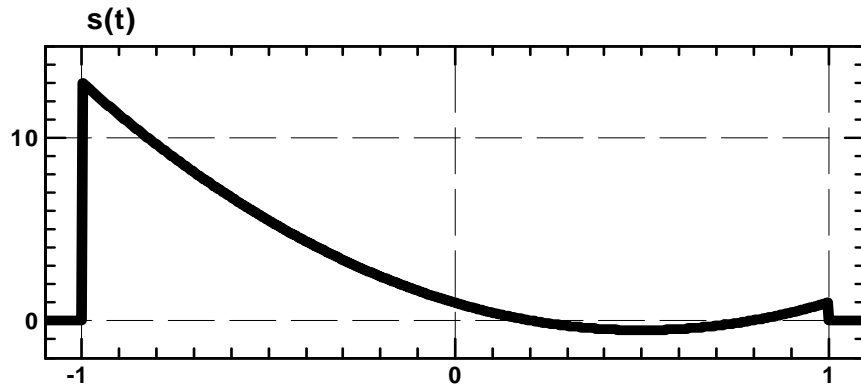


Widmo
amplitudowe



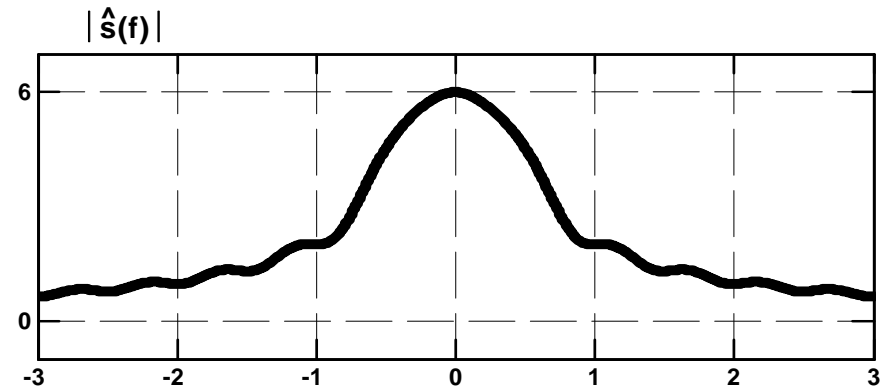
Wykresy do powyższego przykładu

Sygnal



Czas

Widmo
amplitudowe



Częstotliwość



Przykład transformaty Fouriera

Wyznaczyć widmo sygnału $s(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{dla } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$

Ze wzoru definiującego transformację Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_0^1 t^2 e^{-2\pi jft} dt + \int_1^2 e^{-2\pi jft} dt$$

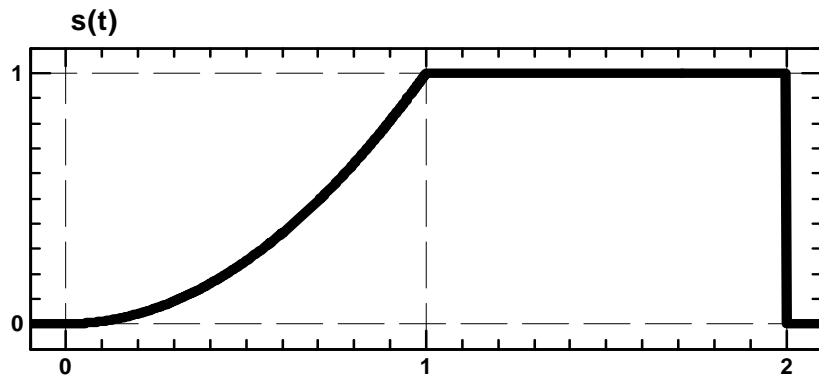
Posługując się tożsamością $\int_0^1 t^2 e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^3} (a^2 t^2 - 2at + 2)$

otrzymujemy

$$\hat{s}(f) = \frac{1}{2\pi f} \left[\frac{\cos(2\pi f) - \sin(2\pi f)}{\pi f} + \sin(4\pi f) + j \left(\frac{1}{2\pi^2 f^2} + \cos(4\pi f) - \frac{\sin(2\pi f) + \cos(2\pi f)}{\pi f} \right) \right]$$

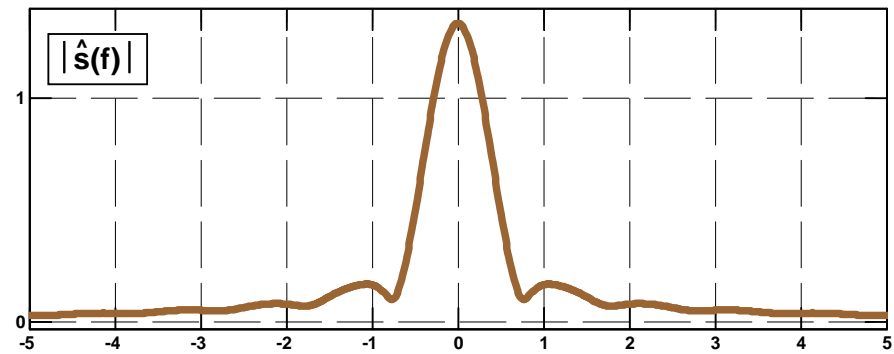
Wykresy do kolejnego przykładu

Sygnal



Czas

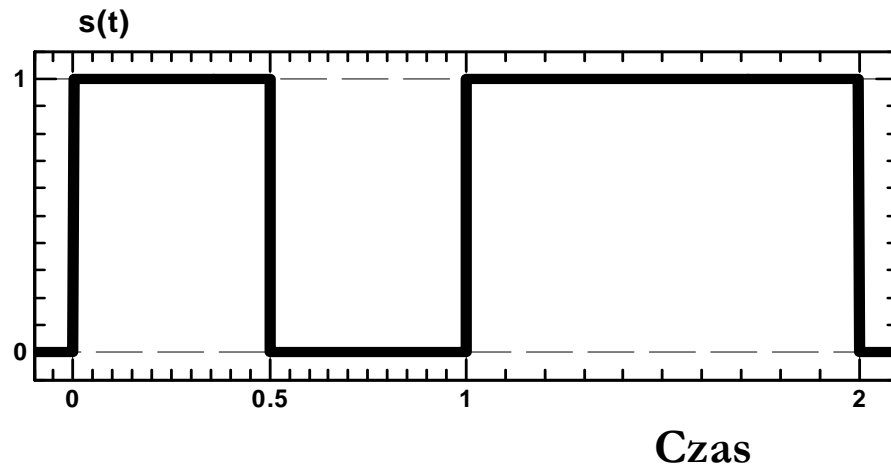
Widmo
amplitudowe



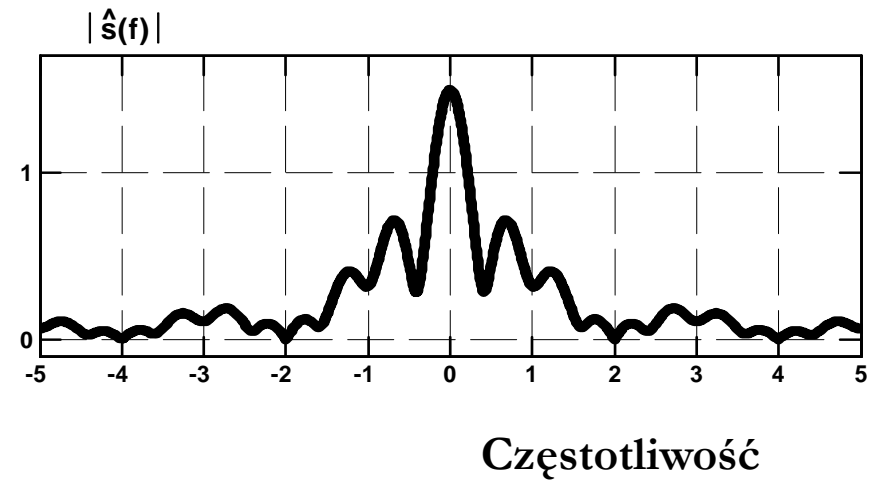
Częstotliwość

Wykresy do kolejnego przykładu

Sygnal



Widmo
amplitudowe



Przykład transformaty Fouriera

Wyznaczyć widmo sygnału

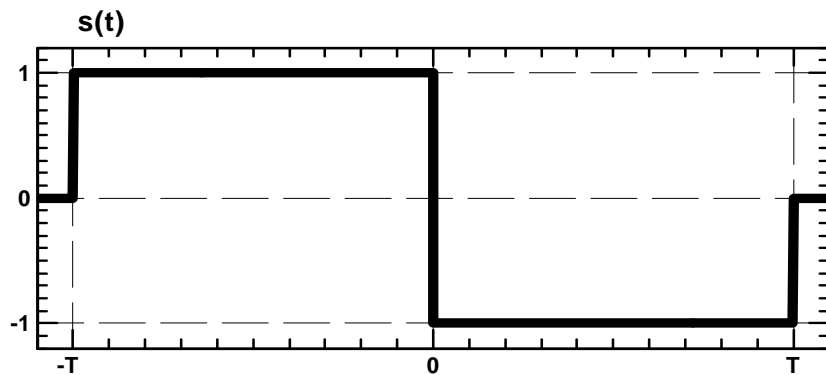
$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t \leq 0,5 \quad \text{i} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

Posługując się definicją transformacji Fouriera

$$\begin{aligned} \hat{s}(f) &= \int_0^{0,5} e^{-2\pi jft} dt + \int_1^2 e^{-2\pi jft} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi f} [\sin(4\pi f) - \sin(2\pi f) + \sin(\pi f) + j(\cos(4\pi f) - \cos(2\pi f) + \cos(\pi f) - 1)] \end{aligned}$$

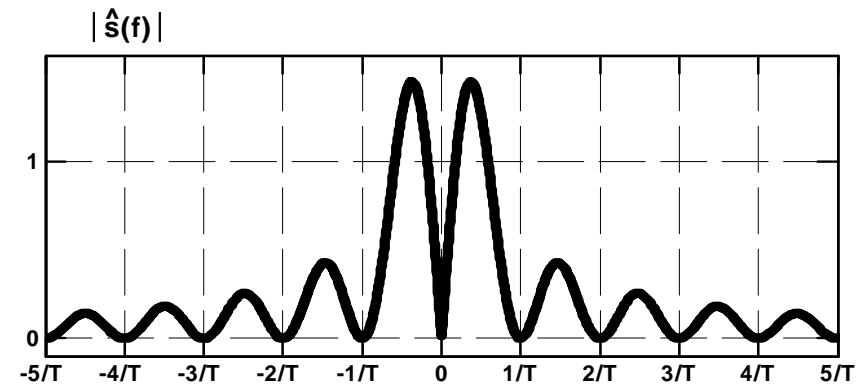
Wykresy do kolejnego przykładu

Sygnal



Czas

Widmo amplitudowe równe
modułowi części urojonej
widma



Częstotliwość

Sygnal jest funkcją nieparzystą, więc widmo jest czysto urojone.
Dla sygnałów o wartościach rzeczywistych widmo urojone jest funkcją nieparzystą.

Kolejny przykład transformaty Fouriera

Obliczyć widmo sygnału $s_\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -T \leq t \leq 0 \\ -1 & \text{dla } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$

Posługując się definicją transformacji Fouriera

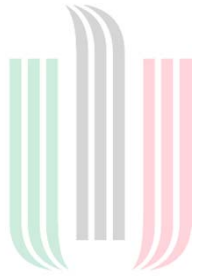
$$\hat{s}_\varphi(f) = \int_{-T}^0 e^{-2\pi jft} dt - \int_0^T e^{-2\pi jft} dt$$

Po całkowaniu

$$\hat{s}_\varphi(f) = -\frac{1}{2\pi jf} e^{-2\pi jft} \Big|_{-T}^0 + \frac{1}{2\pi jf} e^{-2\pi jft} \Big|_0^T$$

Po podstawieniu granic otrzymujemy widmo czysto urojone

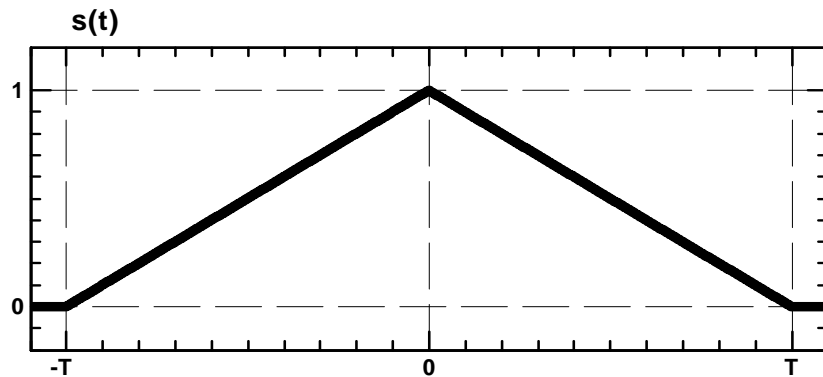
$$\hat{s}_\varphi(f) = \frac{2j}{\pi f} \sin^2(\pi f T)$$



AGH

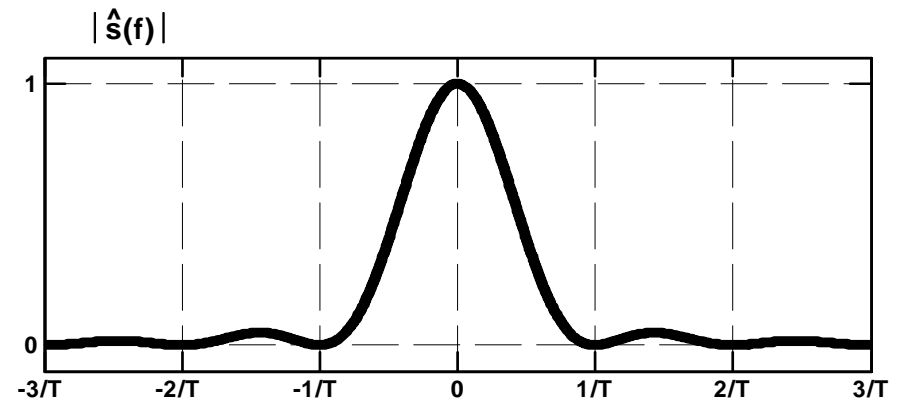
Wykresy do kolejnego przykładu

Sygnal



Czas

Widmo amplitudowe równe
części rzeczywistej widma



Częstotliwość

Sygnal jest funkcją parzystą, więc widmo jest funkcją rzeczywistą. Dla sygnałów o wartościach rzeczywistych widmo rzeczywiste jest funkcją parzystą.



Kolejny przykład transformaty Fouriera

Obliczyć widmo sygnału

$$s_{\Lambda}(t) = \begin{cases} t+T & \text{dla } -T \leq t \leq 0 \\ -t+T & \text{dla } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

Korzystając z zależności

$$s_{\Lambda}(t) = \int_{-T}^t s_{\varphi}(t) dt$$

i posługując się twierdzeniem o transformacie z całki

$$\hat{s}_{\Lambda}(f) = \frac{\hat{s}_{\varphi}(f)}{2\pi j f}$$

otrzymujemy widmo czysto rzeczywiste

$$\hat{s}_{\Lambda}(f) = \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2}$$



Jeszcze jeden przykład dzisiaj

Jakie jest widmo sygnału

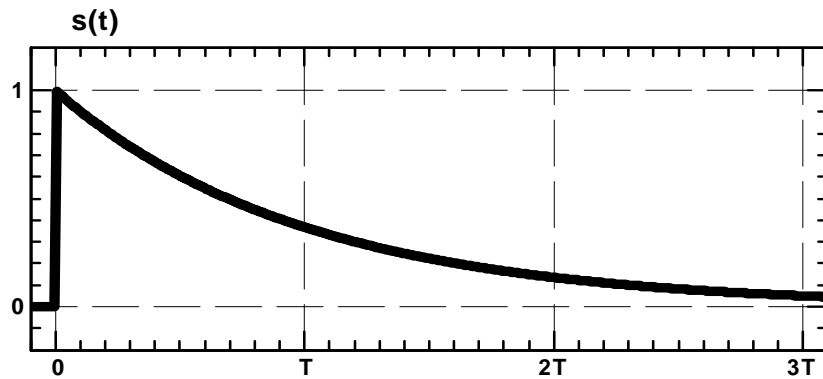
$$s(t) = \begin{cases} e^{-Tt} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

Posługując się definicją transformacji Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_0^{\infty} e^{-(T+2\pi jf)t} dt = -\frac{1}{T+2\pi jf} e^{-(T+2\pi jf)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{T+2\pi jf}$$

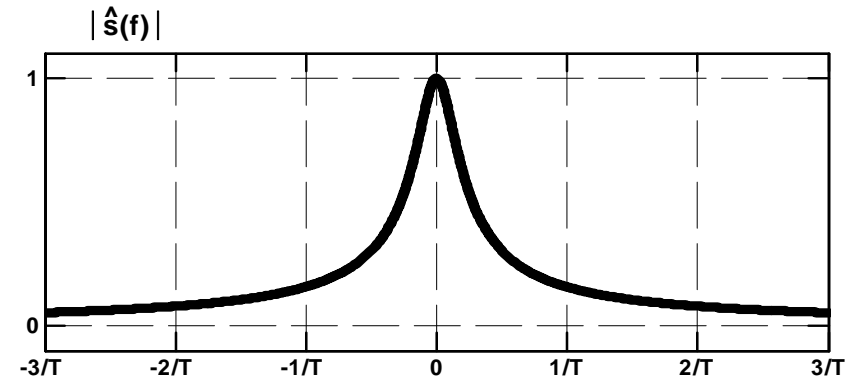
Wykresy do jeszcze jednego przykładu

Sygnal



Czas

Widmo
amplitudowe



Częstotliwość



Kolejny pouczający przykład transformaty Fouriera

Dla sygnału w postaci funkcji Gaussa

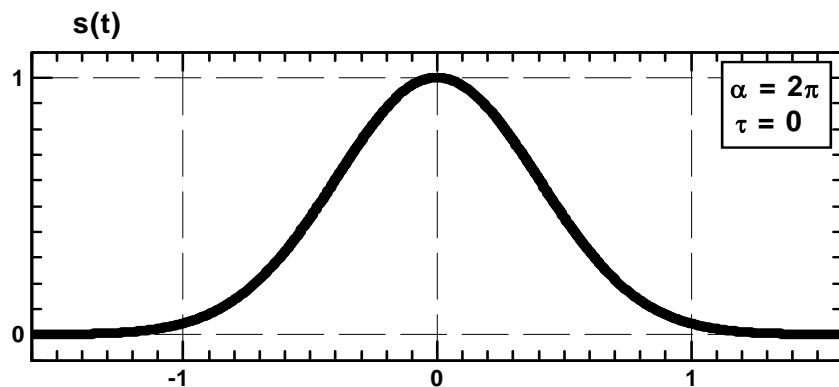
$$s(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t - \tau)^2\right)$$

widmo ma postać

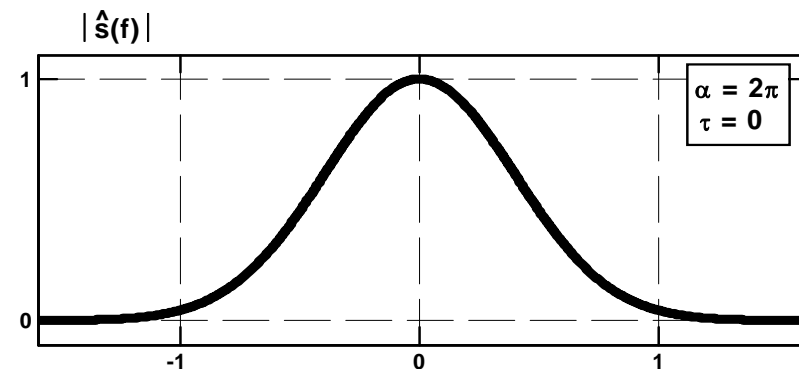
$$\hat{s}(f) = \exp\left(-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha} + 2j\pi f\tau\right)$$

Wykresy do kolejnego pouczającego przykładu

Sygnal



Widmo amplitudowe równie części rzeczywistej widma



Częstotliwość

Sygnal jest funkcją parzystą, więc widmo jest funkcją rzeczywistą. Dla sygnałów o wartościach rzeczywistych widmo rzeczywiste jest funkcją parzystą. Funkcja Gaussa jest niezmiennikiem transformacji Fouriera.



Uogólnienie transformacji Fouriera

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} s_{\alpha}(t) = s(t) \quad \text{gdzie } \alpha > 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{s}_{\alpha}(f) = \hat{s}(f)$$

$\hat{s}(f)$ uogólniona transformata Fouriera,
czyli transformata w sensie granicznym



Widma impulsu Diraca i sygnału stałego

Widmo impulsu Diraca

$$s_T(t) = \frac{s_\Lambda(t)}{T^2} \quad s_\Lambda(t) = \begin{cases} t + T & \text{dla } -T < t < 0 \\ -t + T & \text{dla } 0 < t < T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} s_T(t) = \delta(t) \quad \hat{s}_T(f) = \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} \quad \lim_{T \rightarrow 0} \hat{s}_T(f) = 1$$

$$s(t) = \delta(t) \leftrightarrow \hat{s}(f) = 1$$

Transformata Fouriera sygnału stałego

$$s(t) = 1 \leftrightarrow \hat{s}(f) = \delta(f)$$



Transformaty Fouriera sygnałów okresowych

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

lub

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi j n f_0 t}$$

Widmo

$$s_c(t) = \cos(2\pi n f_0 t)$$

$$s(t) \cos(2\pi n f_0 t) \leftrightarrow 0,5 \hat{s}(f - n f_0) + 0,5 \hat{s}(f + n f_0)$$

$$\cos(2\pi n f_0 t) \leftrightarrow 0,5 \delta(f - n f_0) + 0,5 \delta(f + n f_0)$$

$$\sin(2\pi n f_0 t) \leftrightarrow 0,5 j \delta(f + n f_0) - 0,5 j \delta(f - n f_0)$$

$$e^{2\pi j n f_0 t} = \cos(2\pi n f_0 t) + j \sin(2\pi n f_0 t)$$

$$e^{2\pi j n f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - n f_0)$$

$$\hat{s}(f) = a_0 \delta(f) + 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + j b_n) \delta(f + n f_0) + (a_n - j b_n) \delta(f - n f_0)]$$

$$\hat{s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - n f_0)$$

Różniczkowanie w dziedzinie częstotliwości

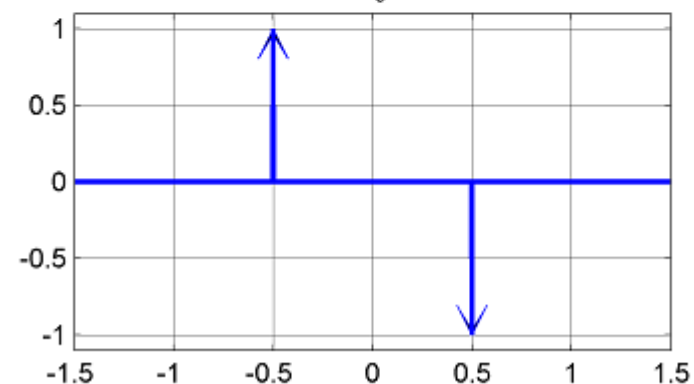
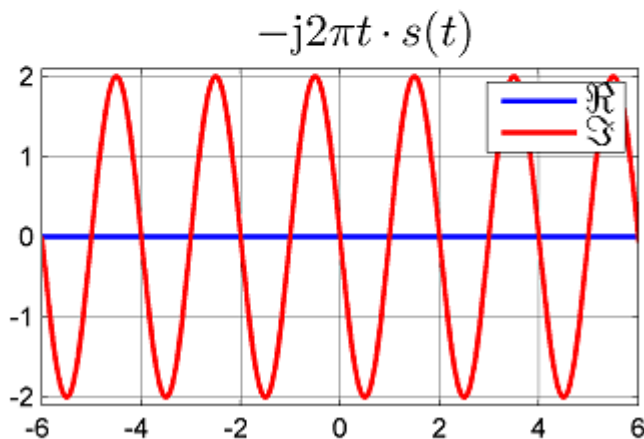
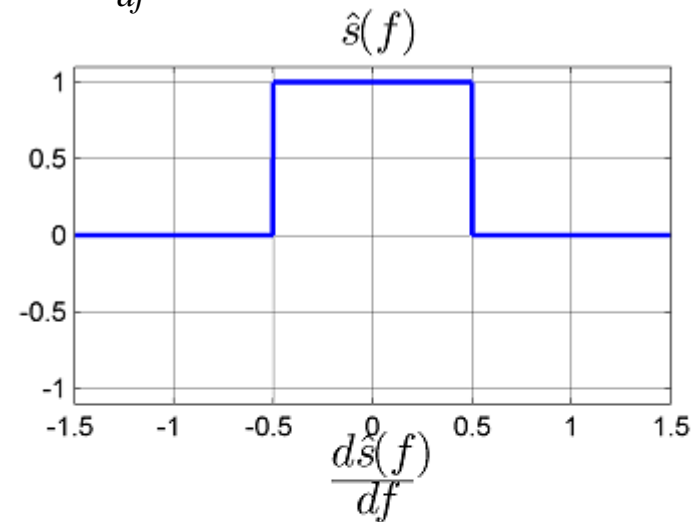
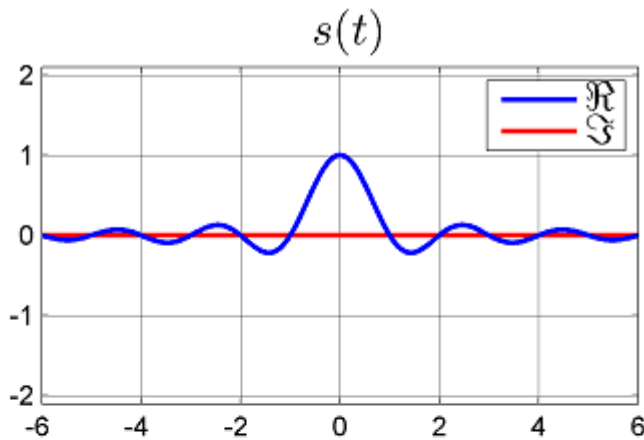
$$s_1(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$s_2(t) = -j2\pi t \cdot s_1(t) = -j2\sin(\pi t)$$

$$\hat{s}_1(f) = \Pi(f)$$

$$\hat{s}_2(f) = \delta(f + \frac{1}{2}) - \delta(f - \frac{1}{2})$$

bo $(-2\pi jt)^n s(t) \leftrightarrow \frac{d^n \hat{s}(f)}{df^n}$





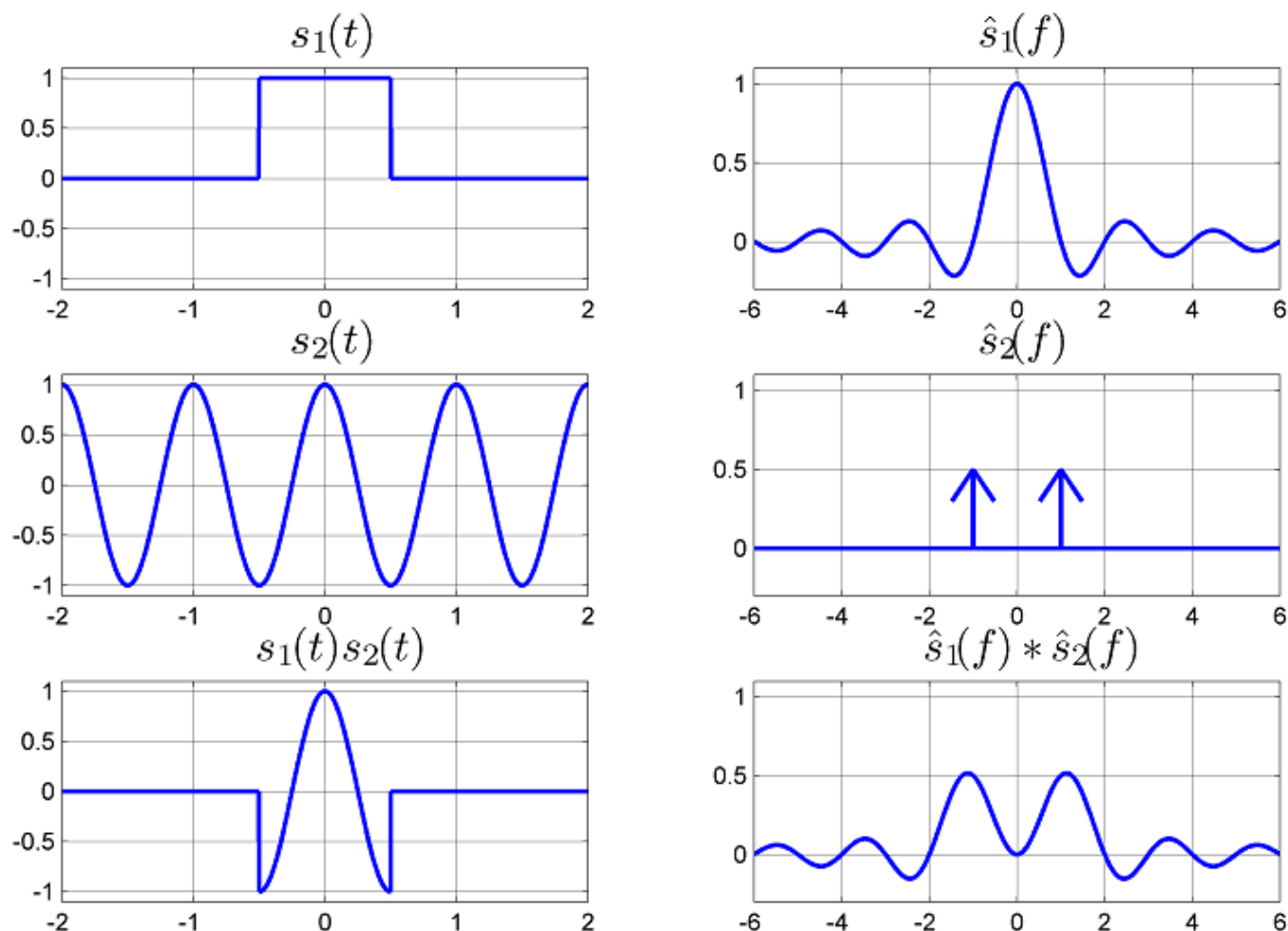
Iloczyn w dziedzinie czasu

$$s_1(t) = \Pi(t) \leftrightarrow \hat{s}_1(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

$$s_2(t) = \cos(2\pi t) \leftrightarrow \hat{s}_2(f) = \frac{1}{2}(\delta(f+1) + \delta(f-1))$$

$$s_1(t) \cdot s_2(t) = \cos(2\pi t) \cdot \Pi(t) \leftrightarrow \hat{s}_1(f) * \hat{s}_2(f) = \frac{\sin(\pi(f+1))}{2\pi(f+1)} + \frac{\sin(\pi(f-1))}{2\pi(f-1)}$$

Iloczyn w dziedzinie czasu



$$s_1(t) \cdot s_2(t) = \cos(2\pi t) \cdot \Pi(t) \leftrightarrow \hat{s}_1(f) * \hat{s}_2(f) = \frac{\sin(\pi(f+1))}{2\pi(f+1)} + \frac{\sin(\pi(f-1))}{2\pi(f-1)}$$



Transformacja Fouriera sygnału z niezerową wartością średnią

$$s(t) = s_0(t) + \bar{s}$$

gdzie $s_0(t)$ spełnia warunki dla klasycznej transformacji Fouriera
 \bar{s} sygnał o stałej wartości, czy

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$$

$$s(t) = s_0(t) + \bar{s} \leftrightarrow \hat{s}(f) = \hat{s}_0(f) + \bar{s} \delta(f)$$



Transformacja Fouriera sygnału 2-D

Widmo sygnału dwu-wymiarowego

$$\hat{s}(f_x, f_y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int s(x, y) e^{-2\pi j(f_x x + f_y y)} dx dy$$

$$s(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \hat{s}(f_x, f_y) e^{2\pi j(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$



Wielowymiarowe przekształcenia Fouriera

Jeśli $x, f \in \mathfrak{R}^n$ to

$$\hat{s}(f) = \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{x_n=-\infty}^{+\infty} s(x) e^{-2\pi j f^T x} dx_1 \cdots dx_n$$

$$s(x) = \int_{f_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{f_n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi j f^T x} df_1 \cdots df_n$$