Specyficzne filtry cyfrowe

Materiał w znacznej części zaczerpnięty z książki

Sanjit K. Mitra „Digital Signal Processing. A Computer-Based Approach"

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów IIR

$$\underline{f} = f\Delta t = f / f_p$$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}$$

$$z = e^{2\pi j \underline{f}} = \cos(2\pi \underline{f}) + j\sin(2\pi \underline{f})$$

$$\underline{f} = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

$$\underline{f} = 0{,}5 \Leftrightarrow z = -1$$

$$H(\underline{f}) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

Fazowa

$$\theta(\underline{f}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im}(H(\underline{f}))}{\operatorname{Re}(H(\underline{f}))}$$

Opóźnienie fazowe

$$\tau(\underline{f}) = -\frac{d\theta(\underline{f})}{d\underline{f}}$$

Kwadrat charakterystyki amplitudowej dla wszystkich filtrów

$$H(z)H(z^{-1}) \overset{z = e^{2\pi j \underline{f}}}{=} H(e^{2\pi j \underline{f}})H(e^{-2\pi j \underline{f}}) = \left|H(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2$$

Dolnoprzepustowy filtr FIR pierwszego rzędu

Najprostszy filtr jest operacją uśredniającą

$$H_L(z) = 0{,}5\left(1 + z^{-1}\right)$$

z charakterystyką zespoloną

$$H_L(e^{2\pi j \underline{f}}) = e^{-\pi \underline{f}} \cos(\pi \underline{f})$$

$$\left|H_L(e^0)\right| = 1 \quad \text{tzn. dla} \quad \underline{f} = 0$$

$$\left|H_L(e^{\pi j})\right| = 0 \quad \text{tzn. dla} \quad \underline{f} = 0{,}5$$

Jest to filtr uśredniający wartości sygnału wejściowego

$$s^{wy}(n) = 0{,}5\left(s^{we}(n) + s^{we}(n-1)\right)$$

Górnoprzepustowy filtr FIR pierwszego rzędu

Najprostszy filtr ma transmitancję

$$H_H(z) = 0{,}5\left(1 - z^{-1}\right)$$

z charakterystyką zespoloną

$$H_H(e^{2\pi j \underline{f}}) = je^{-\pi j \underline{f}} \sin(\pi \underline{f})$$

$$\left|H_H(e^0)\right| = 0 \qquad \text{tzn. dla} \qquad \underline{f} = 0$$

$$\left|H_H(e^{\pi j})\right| = \left|e^{-\pi j/2}\right| = 1 \qquad \text{tzn. dla} \qquad \underline{f} = 0{,}5$$

Jest to filtr preferujący różnice pomiędzy dwoma kolejnymi wartościami

$$s^{wy}(n) = 0{,}5\left(s^{we}(n) - s^{we}(n-1)\right)$$

Dolnoprzepustowy filtr IIR pierwszego rzędu

$$s^{wy}(n) = \alpha\, s^{wy}(n-1) + 0{,}5(1-\alpha)\left(s^{we}(n) + s^{we}(n-1)\right)$$

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_L(z) = \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

gdzie $|\alpha| < 1,$ aby filtr był stabilny. Kwadrat charakterystyki amplitudowej

$$\left|H_L(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2\left(1+\cos(2\pi \underline{f})\right)}{2\left(1+\alpha^2 - 2\alpha\cos(2\pi \underline{f})\right)}$$

$$\left|H_L(e^0)\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2\, 2}{2\left(1+\alpha^2-2\alpha\right)} = 1 \qquad \left|H_L(e^{\pi j})\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2\left(1+\cos(\pi)\right)}{2\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\pi)\right)} = 0$$

Jeżeli $\left|H_L(e^{2\pi j \underline{f_c}})\right| = 0{,}5$ to $\cos\left(2\pi \underline{f_c}\right) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ czyli $\alpha = \dfrac{1-\sin\left(2\pi \underline{f_c}\right)}{\cos\left(2\pi \underline{f_c}\right)}$

gdzie $\underline{f_c}$ jest częstotliwością odcięcia. Czy $\alpha = 0$ dla $\underline{f_c} = 0{,}25$?

Dolnoprzepustowy filtr IIR pierwszego rzędu

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_L(z) = \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

gdzie $|\alpha| < 1,$ aby filtr był stabilny. Kwadrat charakterystyki amplitudowej

$$\left|H_L(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2\left(1+\cos(2\pi \underline{f})\right)}{2\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi \underline{f})\right)}$$

Pierwsza pochodna względem częstotliwości ma postać

$$\frac{d\left|H_L(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2}{d\,\underline{f}} = \frac{-\left(1-\alpha^2\right)^2\sin(2\pi \underline{f})}{2\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi \underline{f})\right)^2}$$

jest ujemna w przedziale $0 < \underline{f} < 0{,}5,$ czyli jest to funkcja monotonicznie malejąca.

Górnoprzepustowy filtr IIR pierwszego rzędu

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_H(z) = \frac{1+\alpha}{2}\frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

gdzie $|\alpha| < 1,$ aby filtr był stabilny.

$$\left|H_H(e^0)\right| = 0 \qquad \left|H_H(e^{\pi j})\right| = 1$$

Jeżeli $\left|H_H(e^{2\pi j \underline{f_c}})\right| = 0{,}5$ to $\cos\left(2\pi \underline{f_c}\right) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ czyli $\alpha = \frac{1-\sin\left(2\pi \underline{f_c}\right)}{\cos\left(2\pi \underline{f_c}\right)}$

Pasmowo-przepustowy filtr IIR drugiego rzędu

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{\boxed{(1-z^{-1})} + \boxed{(z^{-1}-z^{-2})}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

Tłumi składową stałą a przepuszcza częstotliwości wyższe

Przepuszcza średnie częstotliwości (bo niskich już „nie ma”)
i tłumi wysokie

Pasmowo-przepustowy filtr IIR drugiego rzędu

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

Kwadrat charakterystyki amplitudowej

$$\left|H_{BP}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2\left(1-\cos(4\pi \underline{f})\right)}{2\left[1+\beta^2(1+\alpha)^2+\alpha^2-2\beta(1+\alpha)^2\cos(2\pi \underline{f})+2\alpha\cos(4\pi \underline{f})\right]}$$

$$\left|H_{BP}(e^{0})\right| = 0 = \left|H_{BP}(e^{\pi j})\right|$$

Charakterystyka amplitudowa ma największą wartość $\left|H_{BP}(e^{2\pi j \underline{f_0}})\right| = 1$ dla

$$\underline{f_0} = \arccos(\beta)$$

Pasmowo-zaporowy filtr IIR drugiego rzędu

Transmitancja dana jest wzorem

$$H_{BS}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-2\beta z^{-1} + z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

Wartości charakterystyki amplitudowej

$$\left|H_{BS}(e^{0})\right| = 1 = \left|H_{BS}(e^{\pi j})\right|$$

Charakterystyka amplitudowa ma najmniejszą wartość $H_{BS}(e^{2\pi j \underline{f_0}}) = 0$ dla

$$\underline{f_0} = \arccos(\beta)$$

Filtr grzebieniowy, ang. comb filter

Są to filtry z wieloma pasmami przepustowymi i zaporowymi. Najczęściej ich rozmieszczenie jest periodyczne o okresie $1/M$.

Jeżeli $H(z)$ jest filtrem pasmowym (zaporowym lub przepustowym), to

$$G(z) = H(z^M)$$

jest filtrem grzebieniowym. W oparciu o tę zasadę filtr grzebieniowy można otrzymać również z filtru dolnoprzepustowego

$$G(z) = H_L(z^M) = 0{,}5\left(1 + z^{-M}\right)$$

W przedziale $0 \le \underline{f} < 1$ posiada M częstotliwości $\underline{f_k} = (k + 0{,}5)/M$

z minimalnymi wartościami widma amplitudowego i M wartości szczytowych dla $\underline{f_k} = k/M$, przy czym $k = 0, 1, \ldots, M-1$, czyli $0 \le \underline{f_k} < 1$.

Podobnie można zrobić z filtrem górnoprzepustowym

$$G(z) = H_H(z^M) = 0{,}5\left(1 - z^{-M}\right)$$

Filtry wszechprzepustowe

Transmitancja ma postać

$$H(z) = \pm \frac{d_N + d_{N-1} z^{-1} + \ldots + d_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_{N-1} z^{-N+1} + d_N z^{-N}}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_{N-1} z^{-N+1} + d_N z^{-N}$$

otrzymujemy

$$H(z) = \pm \frac{z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)}$$

W przypadku filtru wszechprzepustowego otrzymujemy

$$H(z) H(z^{-1}) = \frac{z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)} \frac{z^{N} D(z)}{D(z^{-1})} = 1$$

Własności filtrów wszechprzepustowych

Dla filtru stabilnego wszystkie bieguny, czyli zera wielomianu $D(p)$ leżą wewnątrz koła jednostkowego. Jeżeli p jest biegunem transmitancji, tzn. $D(p) = 0$, to $z = p^{-1}$ jest jej zerem. Zatem wszystkie zera muszą leżeć poza kołem jednostkowym.

Jeżeli filtr wszechprzepustowy jest stabilny, to

$$|H(z)| \begin{cases} < 1 & \text{gdy} \quad |z| > 1 \\ = 1 & \text{gdy} \quad |z| = 1 \\ > 1 & \text{gdy} \quad |z| < 1 \end{cases}$$

nas interesuje przypadek $|z| = \left|e^{2\pi j \underline{f}}\right| = 1$

Filtr wszechprzepustowy jest bezstratny bo

$$\left|H\left(e^{2\pi j \underline{f}}\right)\right| = \frac{\left|s^{wy}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|}{\left|s^{we}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|} = 1$$

czyli $\left|s^{we}(e^{2\pi j \underline{f}})\right| = \left|s^{wy}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|$

$$E^{wy} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|s^{wy}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2 d\,\underline{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|s^{we}(e^{2\pi j \underline{f}})\right|^2 d\,\underline{f} = E^{we}$$

Przykład filtru wszechprzepustowego

Jeśli filtr posiada bieguny

$$p_1 = -0{,}5 + 0{,}5\,j \qquad p_2 = -0{,}5 - 0{,}5\,j \qquad p_3 = 0{,}5$$

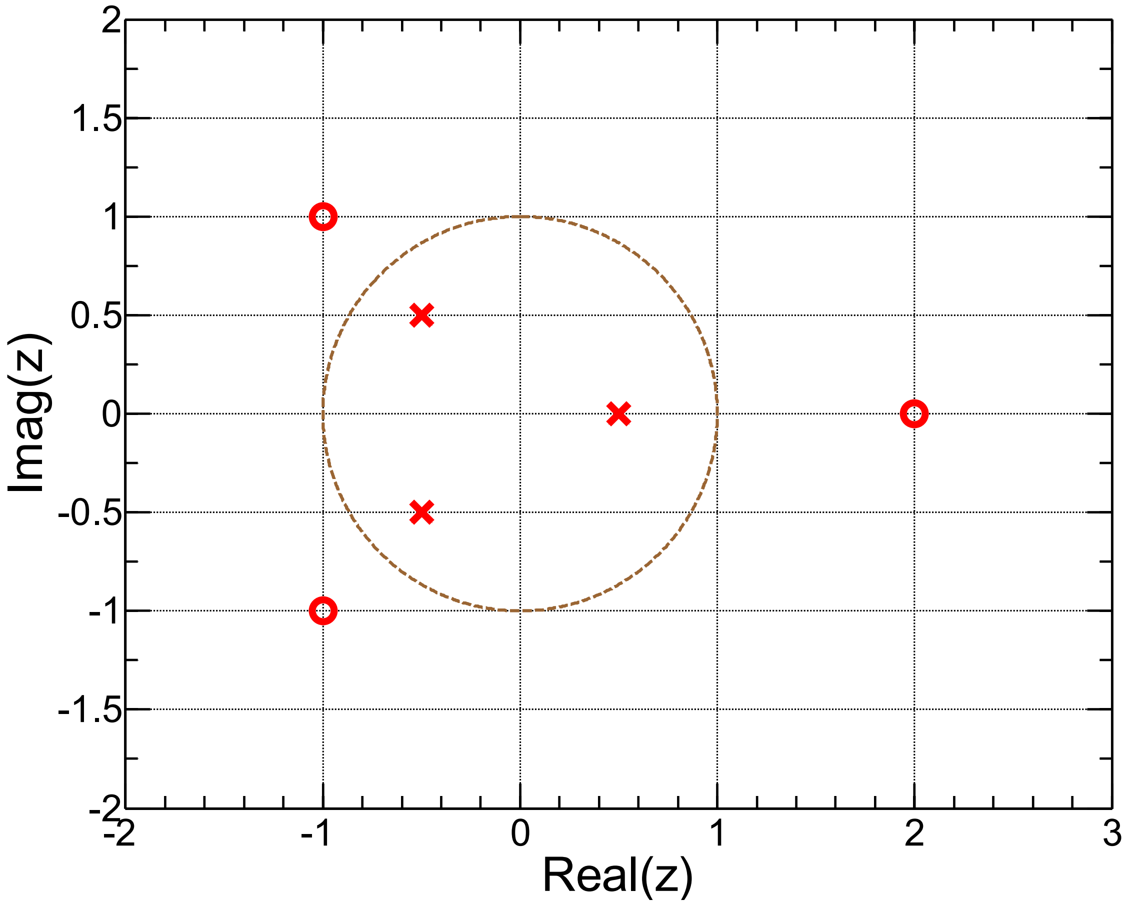
to jego zera muszą mieć wartości

$$z_1 = p_1^{-1} = -1 - j \qquad z_2 = p_2^{-1} = -1 + j \qquad z_3 = p_3^{-1} = 2$$

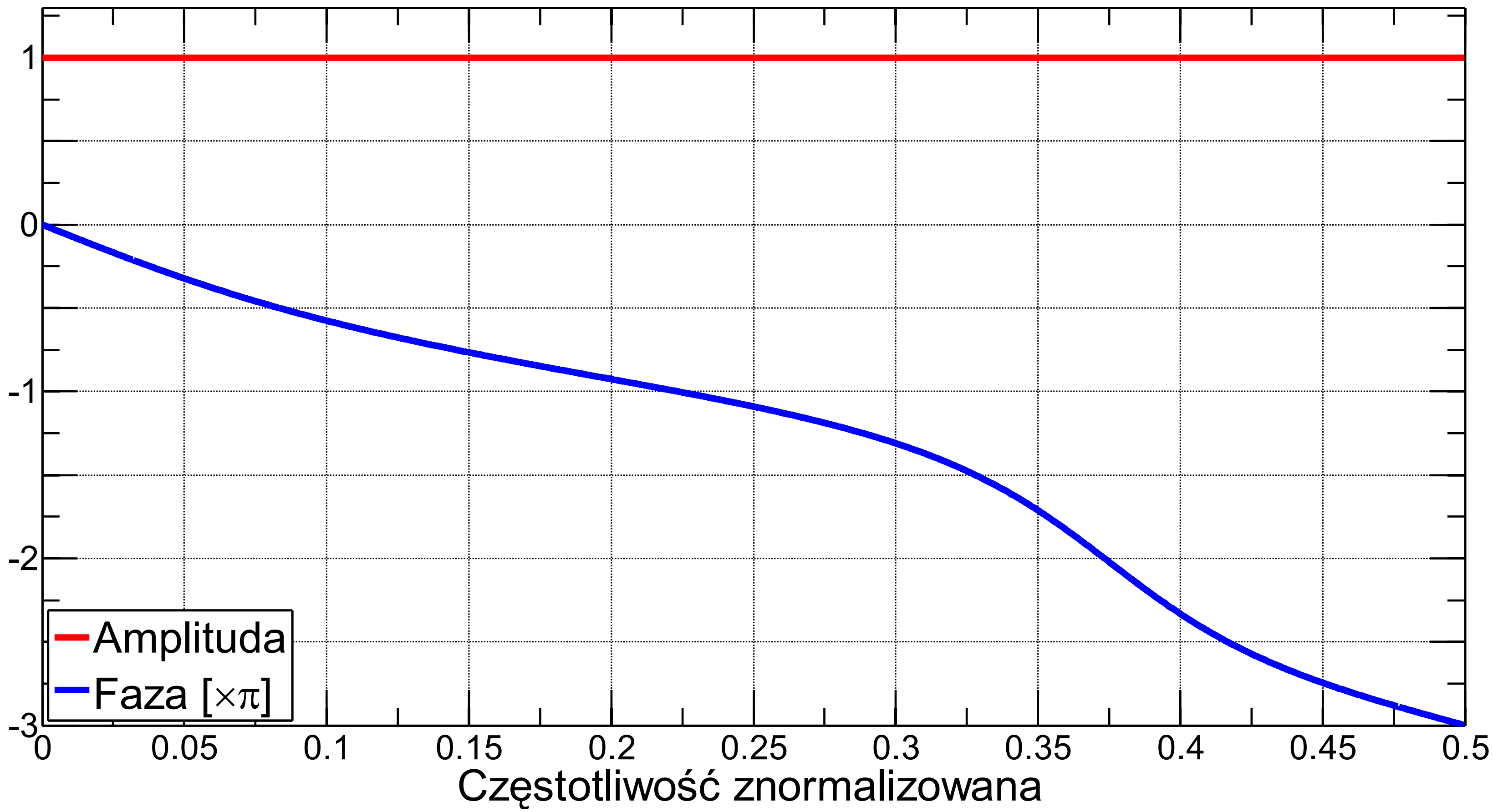
a transmitancja niech będzie

$$H(z) = \frac{-1 + 2z^{-2} + 4z^{-3}}{4 + 2z^{-1} - z^{-3}}$$

Rozmieszczenie zer i biegunów filtru wszechprzepustowego



Charakterystyki częstotliwościowe filtru wszechprzepustowego



Filtry minimalno i maksymalnofazowe

Filtry **stabilne i przyczynowe** o jednakowych charakterystykach amplitudowych, z zerami poza kołem jednostkowym mają większe odchyłki charakterystyk fazowych względem $\theta(\underline{f}) = 0 \quad \forall \underline{f} : 0 \leq \underline{f} \leq 0{,}5$ niż filtry z zerami w kole jednostkowym.

Filtry z zerami w kole jednostkowym są nazywane **minimalnofazowymi** a filtry z zerami poza kołem jednostkowym, **maksymalnofazowmi**.

Każdy filtr nieminimalnofazowy może być zastąpiony połączeniem szeregowym filtru minimalnofazowego i filtru wszechprzepustowego

$$H_{\mathrm{nie}}(z) = H_{\mathrm{min}}(z)\, H_{\mathrm{wsz}}(z)$$

Przykład

Porównajmy charakterystyki częstotliwościowe dwóch filtrów:

$$H_1(z) = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \qquad\qquad H_2(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

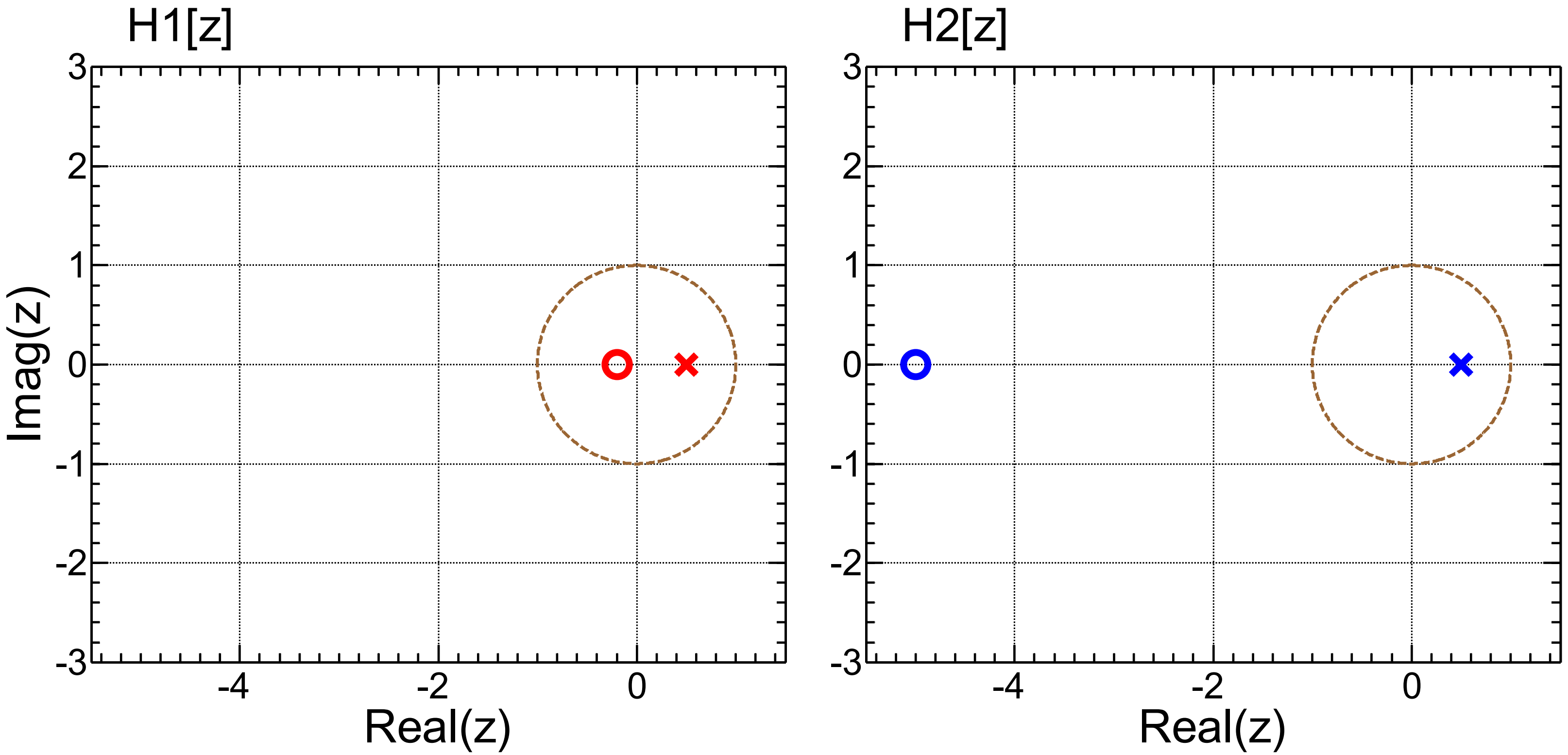
założmy $\quad a = -0{,}5 \qquad b = 0{,}2$

Wtedy oba filtry mają bieguny w punkcie $z = 0{,}5$ czyli są stabilne.

Pierwszy filtr ma zero w punkcie $z = -0{,}2$ czyli jest minimalnofazowy.

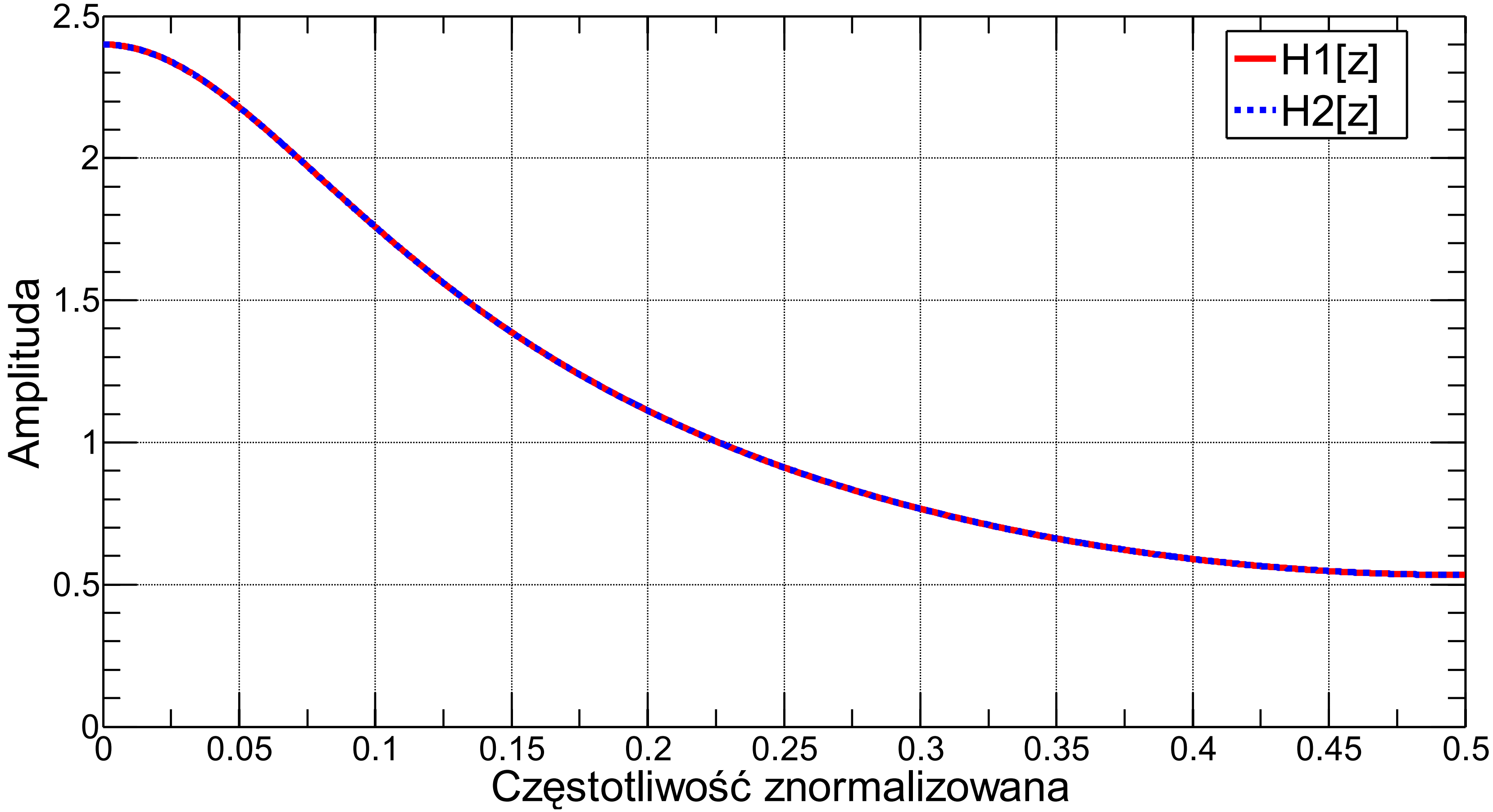
Drugi filtr ma zero w punkcie $z = -5$ czyli jest maksymalnofazowy.

Zera i bieguny

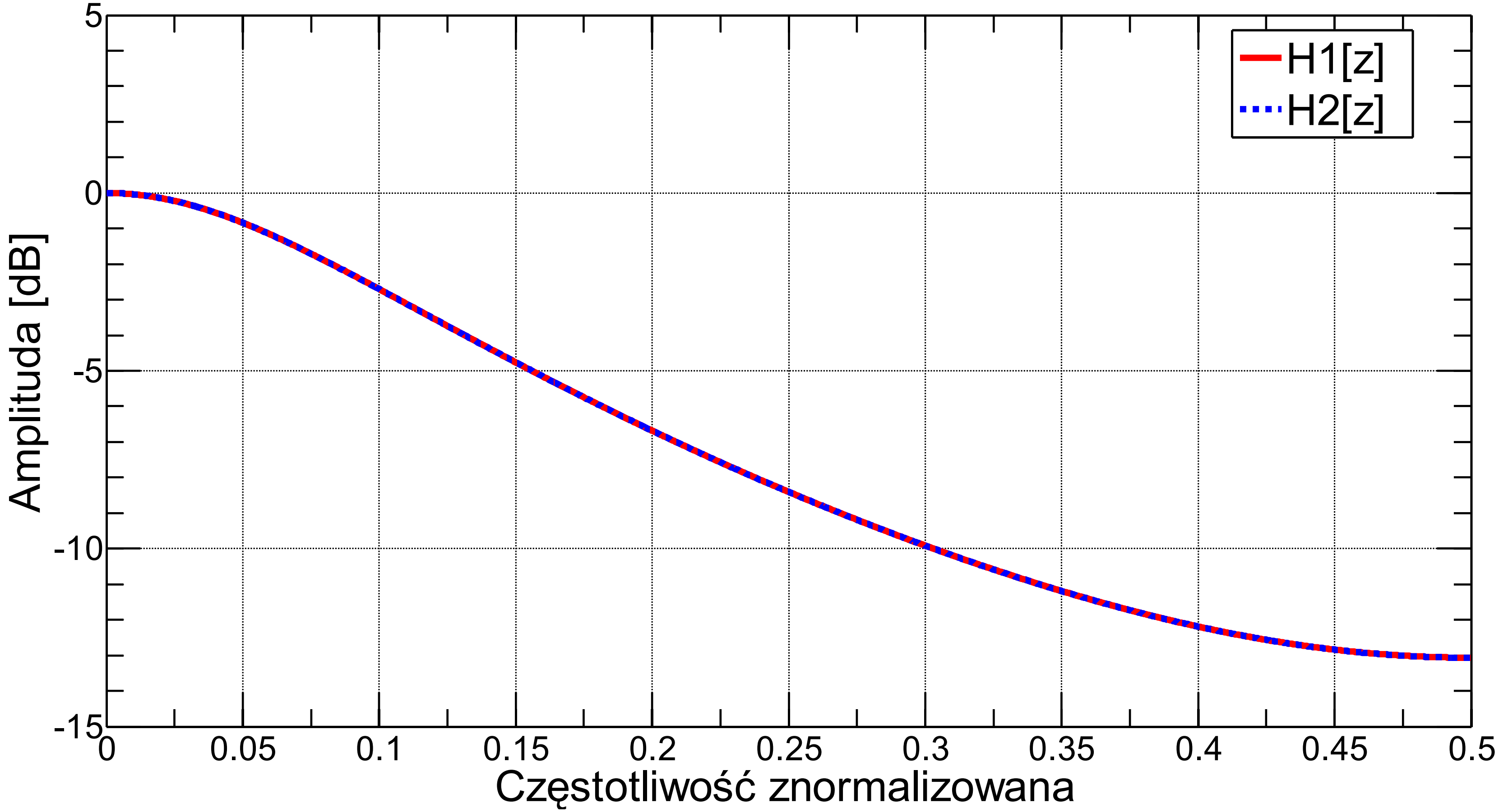


$$\left|H(e^{2\pi j \underline{f}})\right|$$

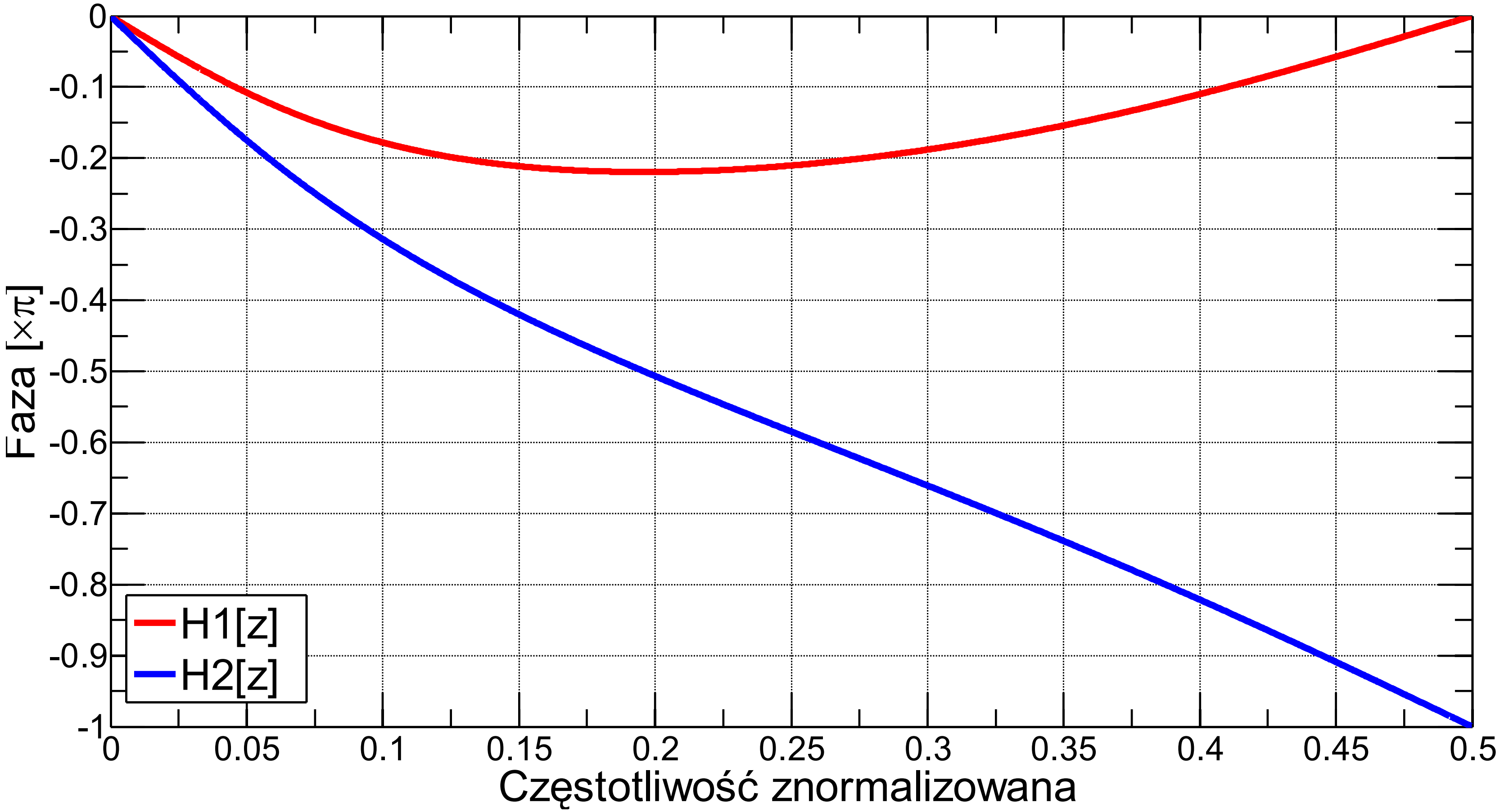
Jednakowe charakterystyki amplitudowe



Charakterystyki amplitudowe $20\lg_{10}\left|H(e^{2\pi j \underline{f}})\right|$ [dB]



Różne charakterystyki fazowe



*H*1 jest filtrem minimalnofazowym, *H*2 maksymalnofazowym

Filtry komplementarne

Opóźnieniowo-komplementarne
$$\sum_{k=0}^{K-1} H_k(z) = \beta z^{-n_0}$$

Wszechprzepustowo-komplementarne
$$\sum_{k=0}^{K-1} H_k(z) = A(z)$$

Energetycznie-komplementarne
$$\sum_{k=0}^{K-1} H_k(z)\, H_k(z^{-1}) \overset{z=e^{2\pi j \frac{f}{\ }}}{=} \sum_{k=0}^{K-1} \left| H_k(e^{2\pi j \frac{f}{\ }}) \right|^2 = 1$$

Amplitudowo-komplementarne
$$\sum_{k=0}^{K-1} \left| H_k(e^{2\pi j \frac{f}{\ }}) \right| = \beta$$

Filtry komplementarne są filtrami równoległymi, bo np.

$$H_1(z)\,s(z) + H_2(z)\,s(z) + ...H_{K-1}(z)\,s(z) = \beta z^{-n_0} s(z)$$

Całkowanie w dziedzinie czasu

A może by tak wykorzystać wzór

$$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi jf}\,\hat{s}(f)$$

do „całkowania” sygnału cyfrowego? Oczywiście pamiętamy, że musi być spełniony warunek

$$\hat{s}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,dt = 0$$

Procedura całkowania sygnału poprzez transformację Fouriera

Posłużymy się zatem schematem

$$s_{in} \;\rightarrow\; FFT \;\rightarrow\; \hat{s}_{in} \;\rightarrow\; \hat{s}_{in}(k)H(k) \;\rightarrow\; IFFT \;\rightarrow\; s_{out}$$

gdzie

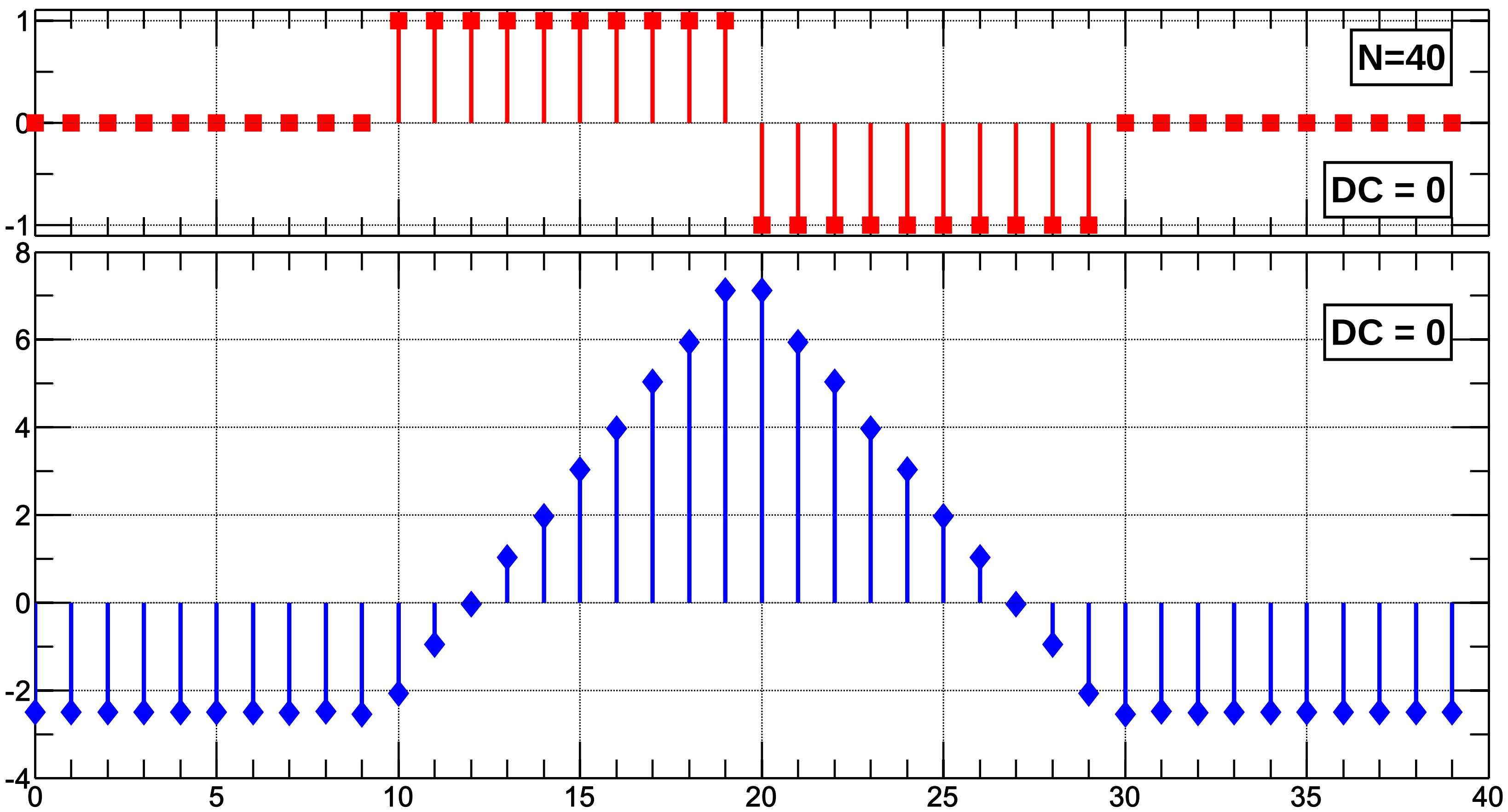
$$H(k) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k = 0 \\ \dfrac{N}{2\pi j k} & \text{dla} \quad 1 \le k \le (N-1)/2 \\ \dfrac{N}{2\pi j (k-N)} & \text{dla} \quad (N+1)/2 \le k \le N-1 \end{cases}$$

dla N nieparzystego

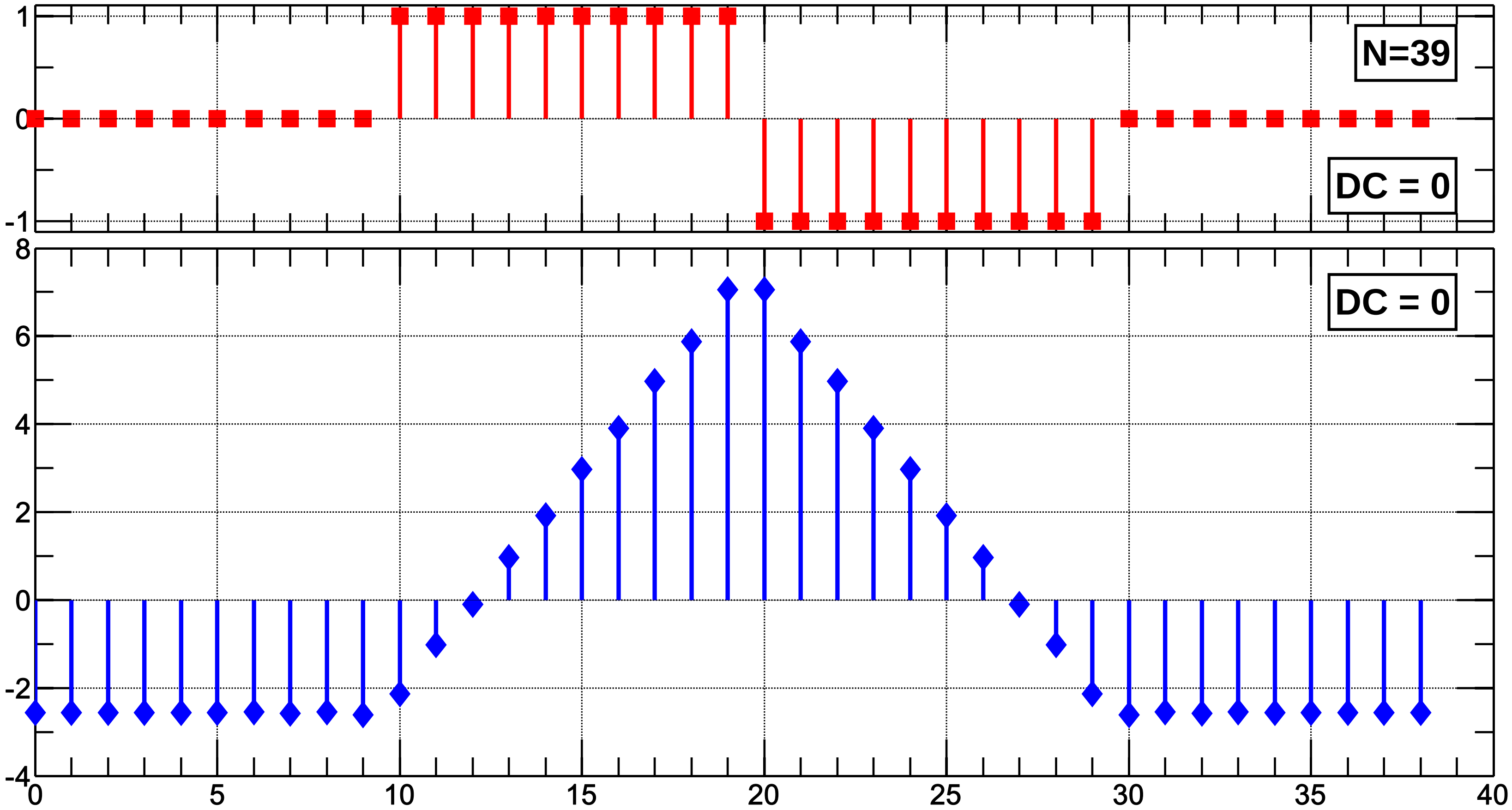
$$H(k) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k = 0 \\ \dfrac{N}{2\pi j k} & \text{dla} \quad 1 \le k \le N/2 \\ \dfrac{N}{2\pi j (k-N)} & \text{dla} \quad 1 + N/2 \le k \le N-1 \end{cases}$$

dla N parzystego

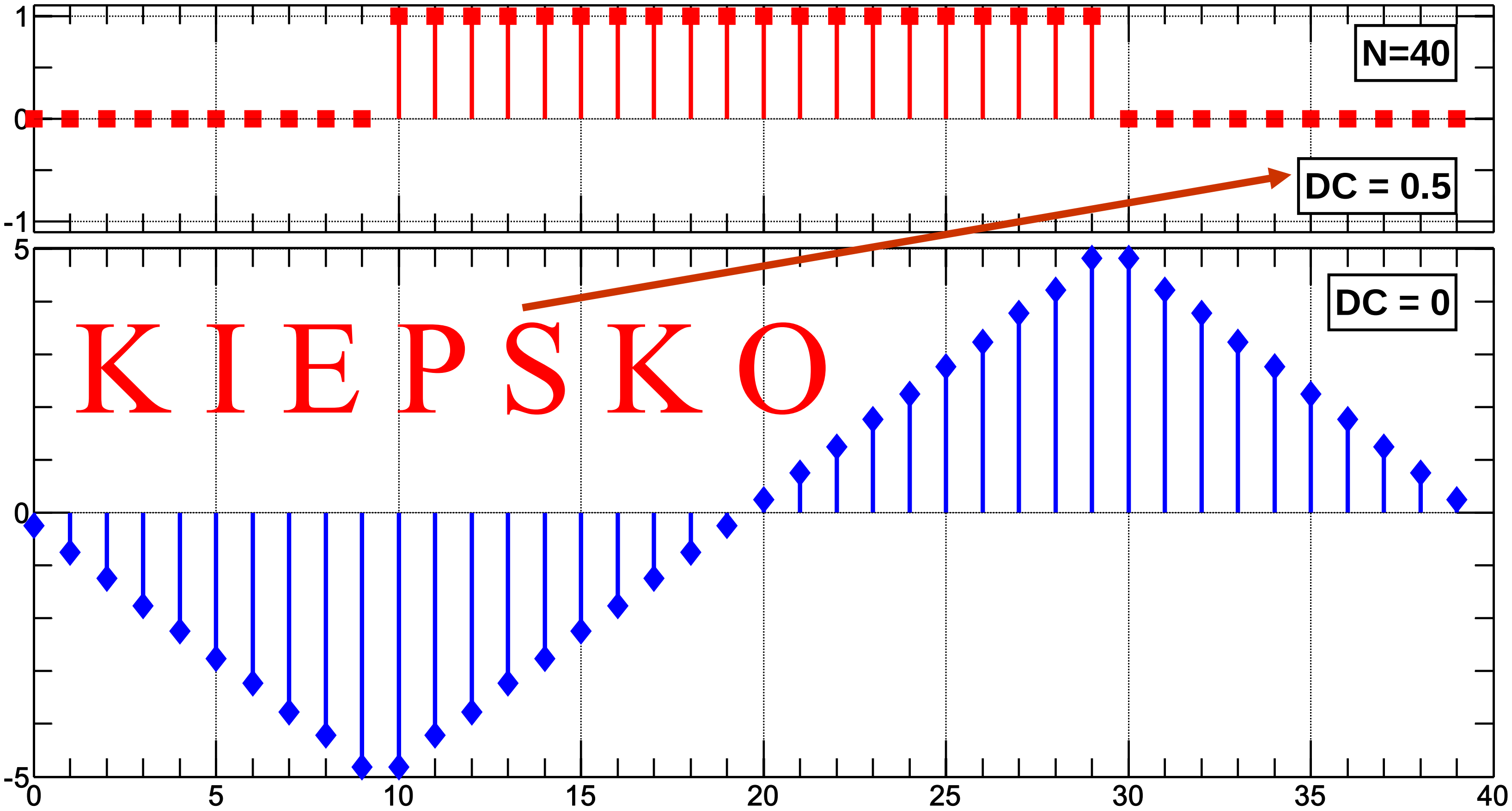
Całkowanie przez FFT
(N parzyste, DC=0)



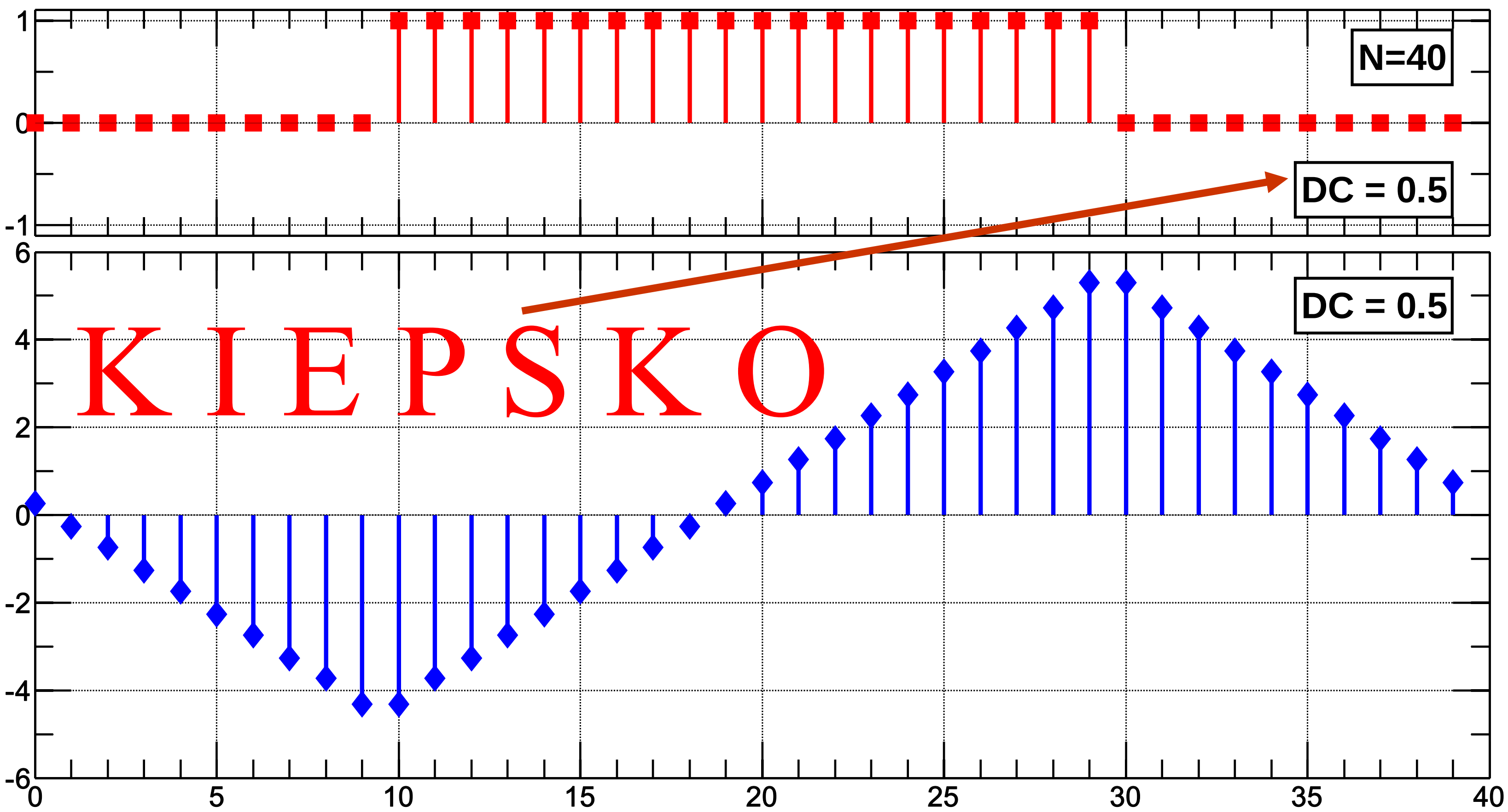
Całkowanie przez FFT
(N nieparzyste, DC=0)



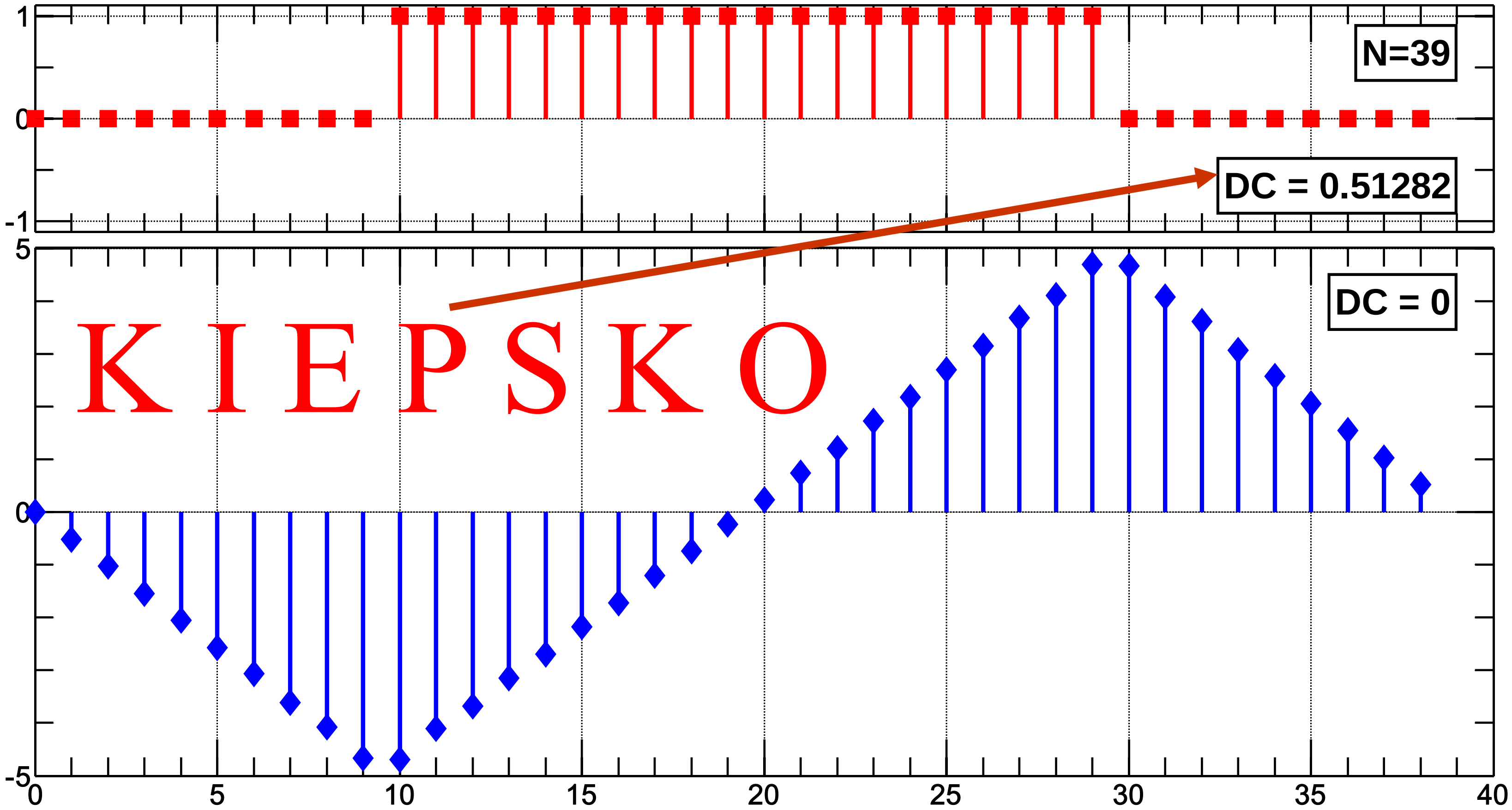
Całkowanie przez FFT (N parzyste, DC≠0)



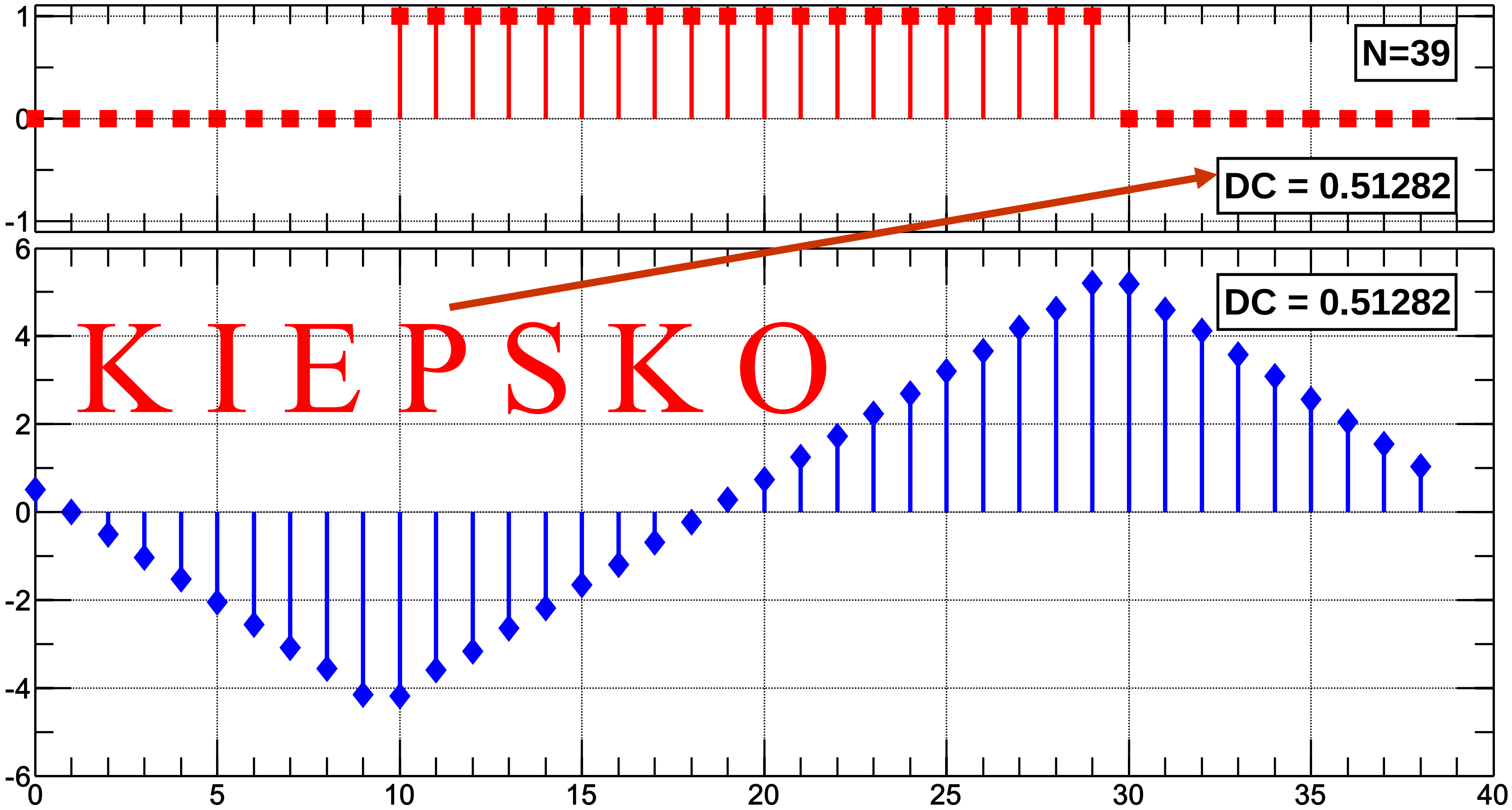
Całkowanie przez FFT (N parzyste, DC≠0, H(0)=1)



Całkowanie przez FFT
(N nieparzyste, DC≠0)



Całkowanie przez FFT
(N nieparzyste, DC≠0, H(0)=1)



Procedura całkowania sygnału poprzez dolnoprzepustowe filtry IIR

Wyliczanie wartości całek metodą prostokątów

$$s^{wy}(N) = \Delta t \sum_{i=0}^{N} s^{we}(i)$$

jest filtracją

$$s^{wy}(n+1) = s^{wy}(n) + s^{we}(n) / f_p \qquad H(z) = \frac{\Delta t\, z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Podobnie całkowanie metodą trapezów

$$s^{wy}(N) = \left[0{,}5\left(s^{we}(0) + s^{we}(N)\right) + \sum_{i=1}^{N-1} s^{we}(i) \right] \Delta t$$

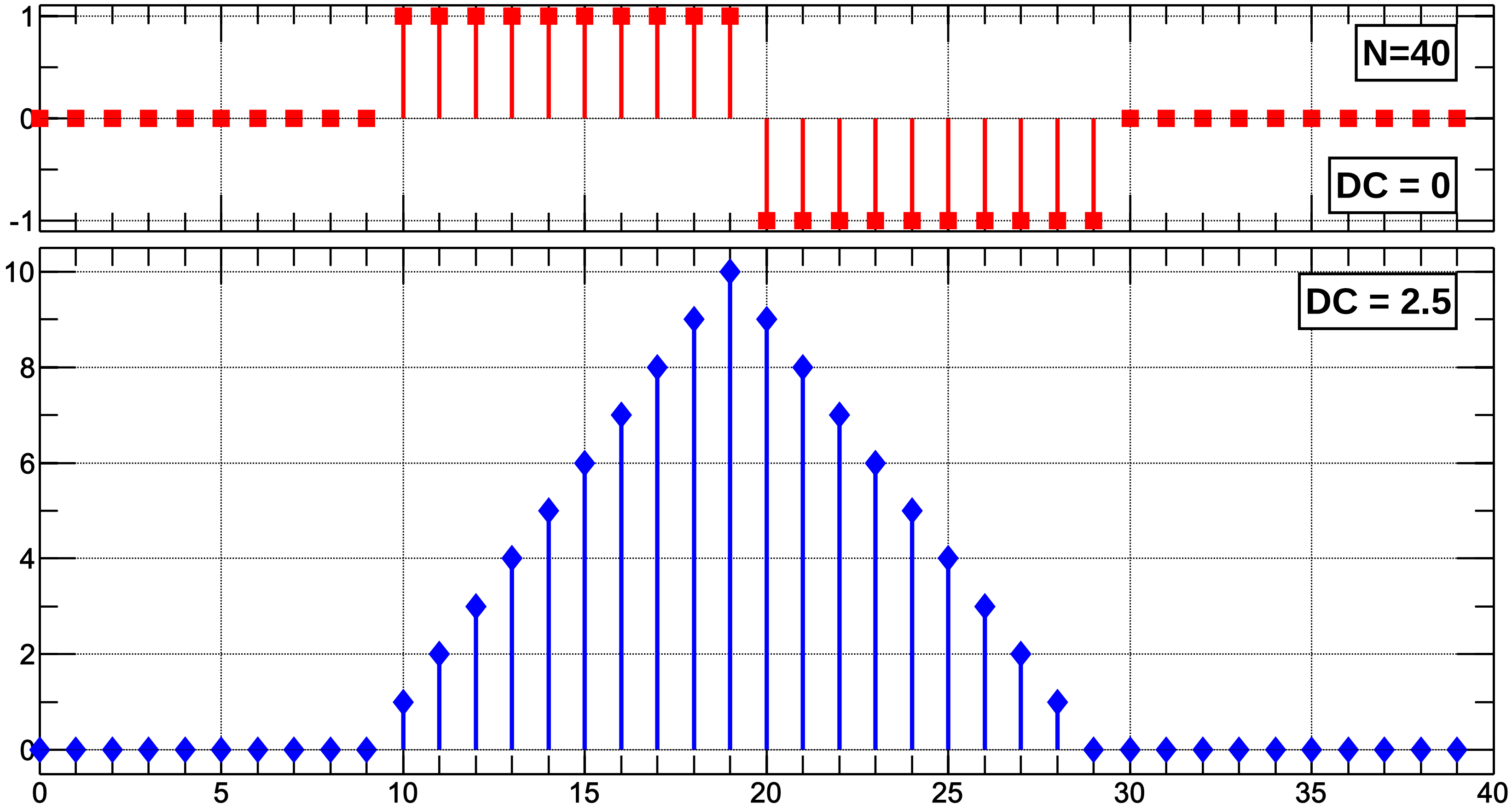
jest filtracją

$$s^{wy}(n+1) = s^{wy}(n) + 0{,}5\left(s^{we}(n-1) + s^{we}(n)\right) / f_p$$

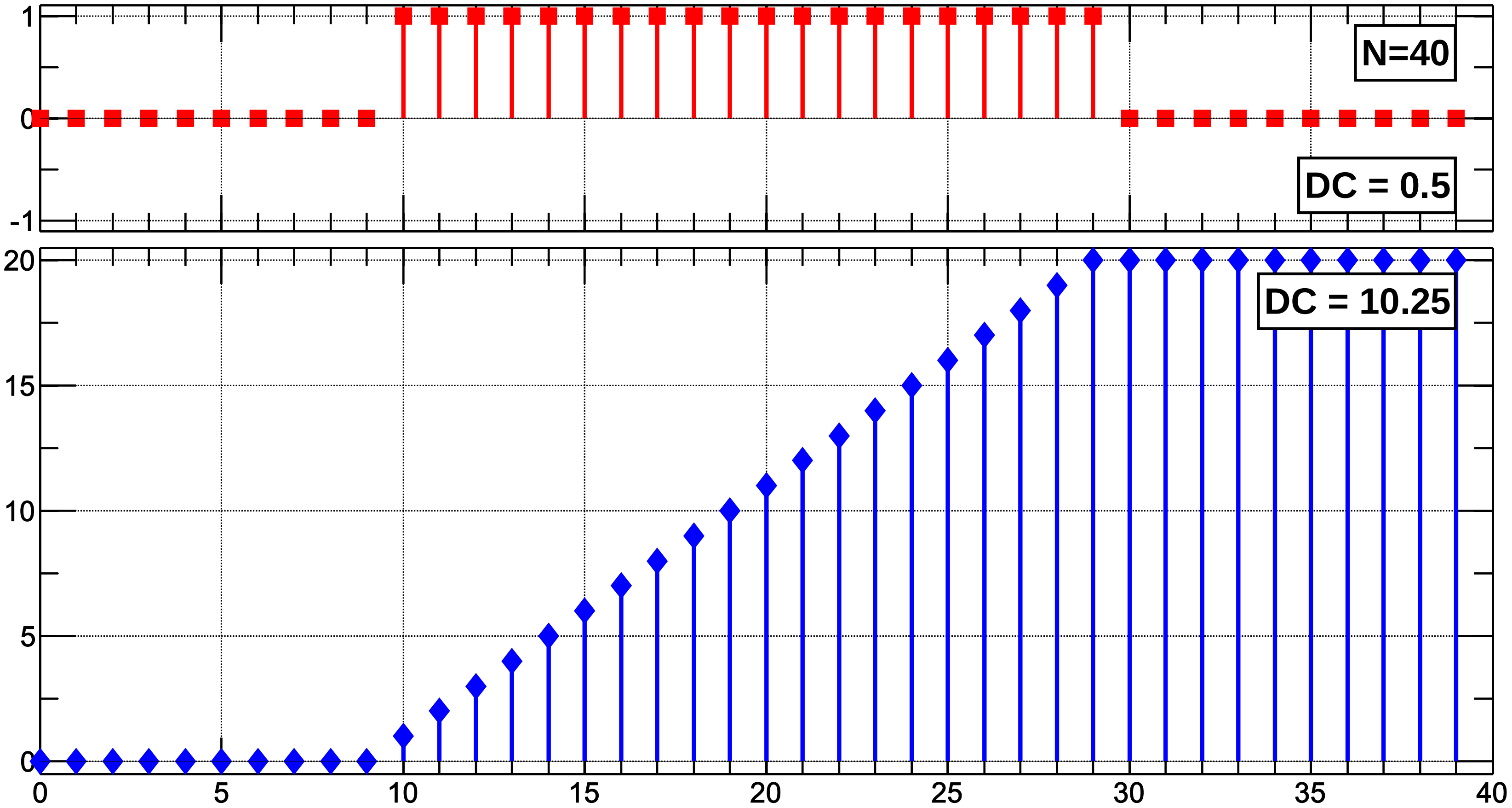
$$H(z) = \frac{0{,}5 \Delta t \left(z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - z^{-1}}$$

Oba filtry mają bieguny równe 1, czyli są „na granicy stabilności”. Może to pogarszać jakość „całkowania” jeżeli sygnał był wcześniej poddany filtracji górnoprzepustowej.

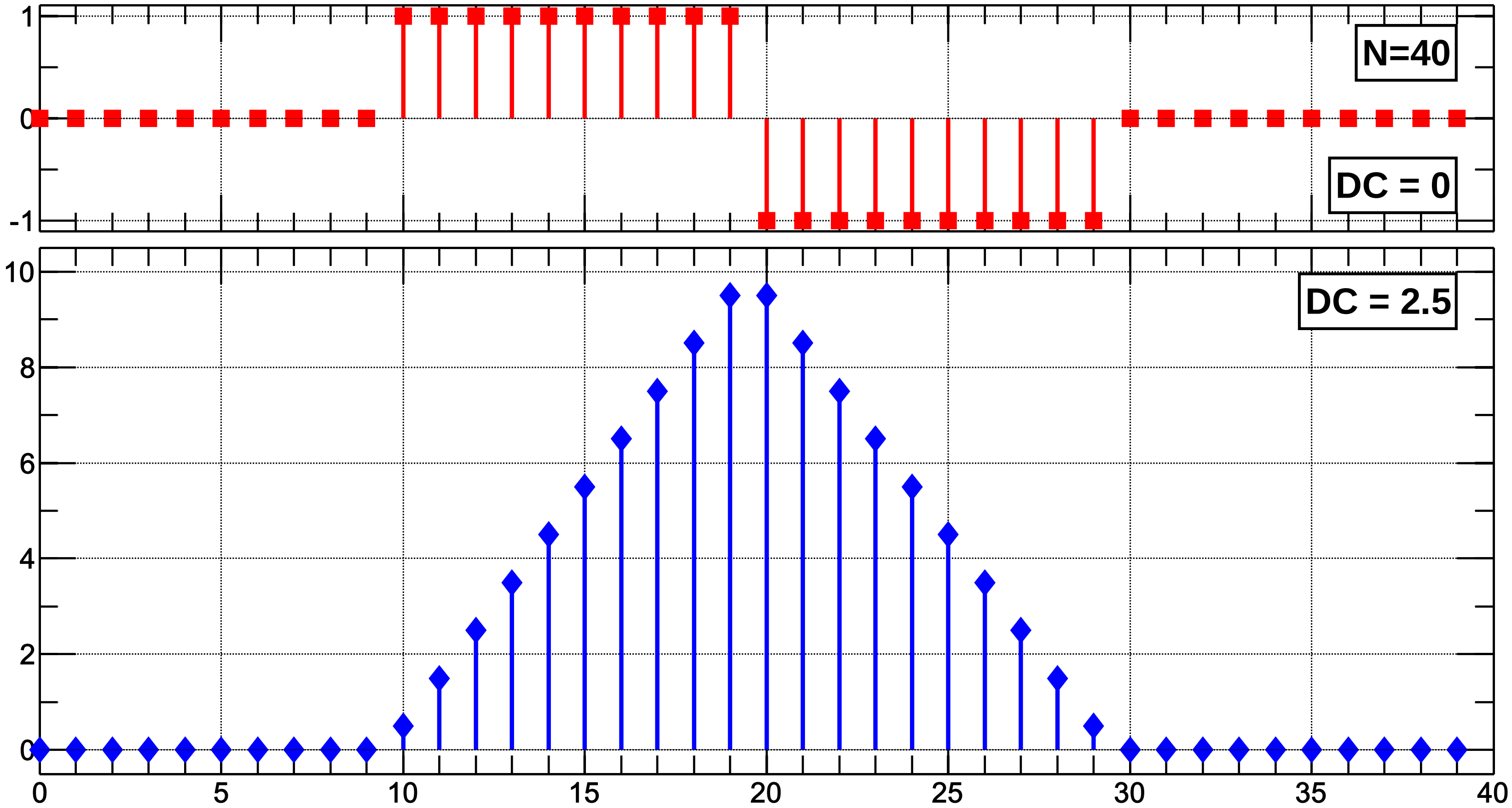
Całkowanie przez IIR
(metoda prostokątów, DC=0)



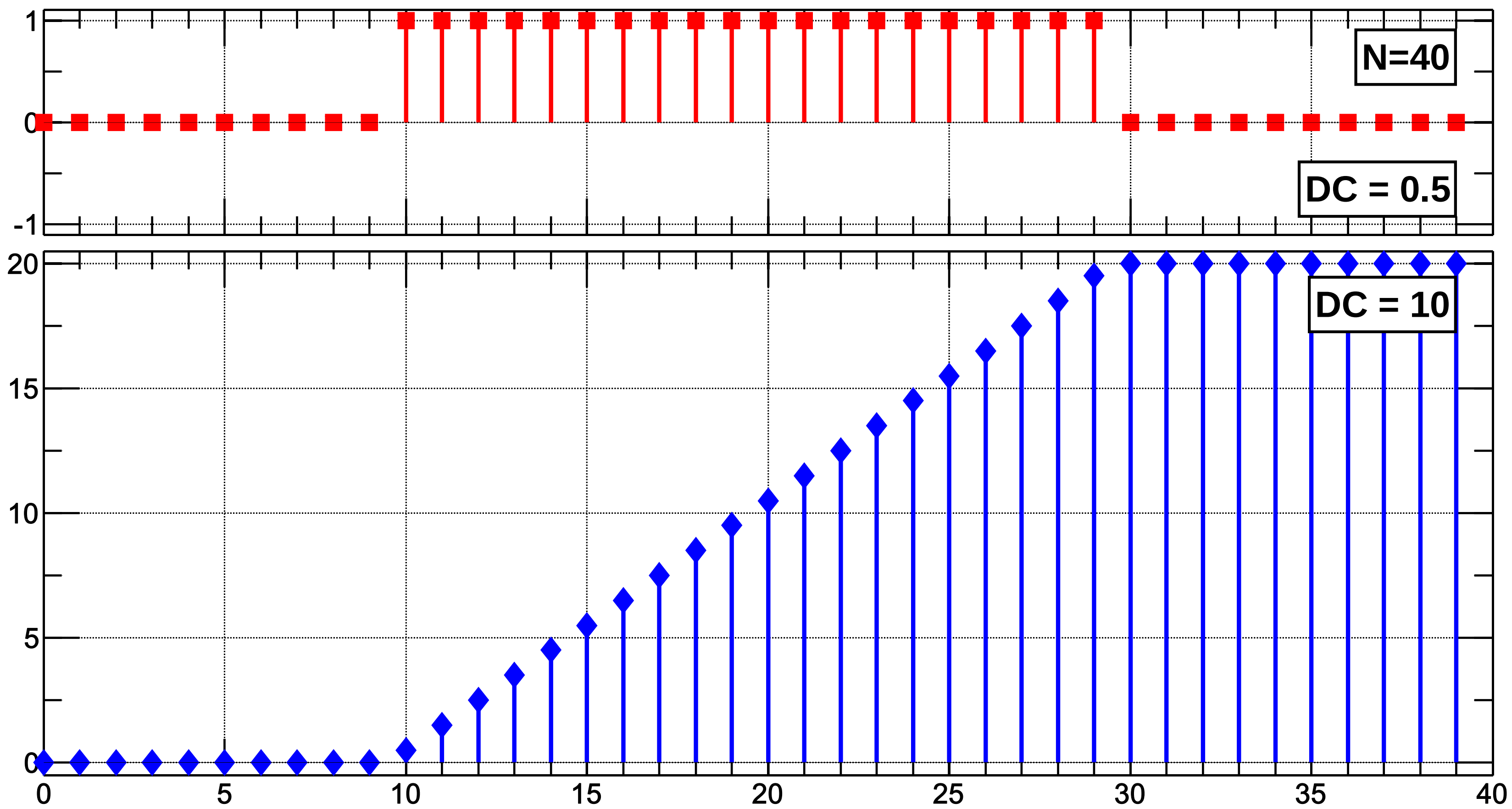
Całkowanie przez IIR (metoda prostokątów, DC≠0)



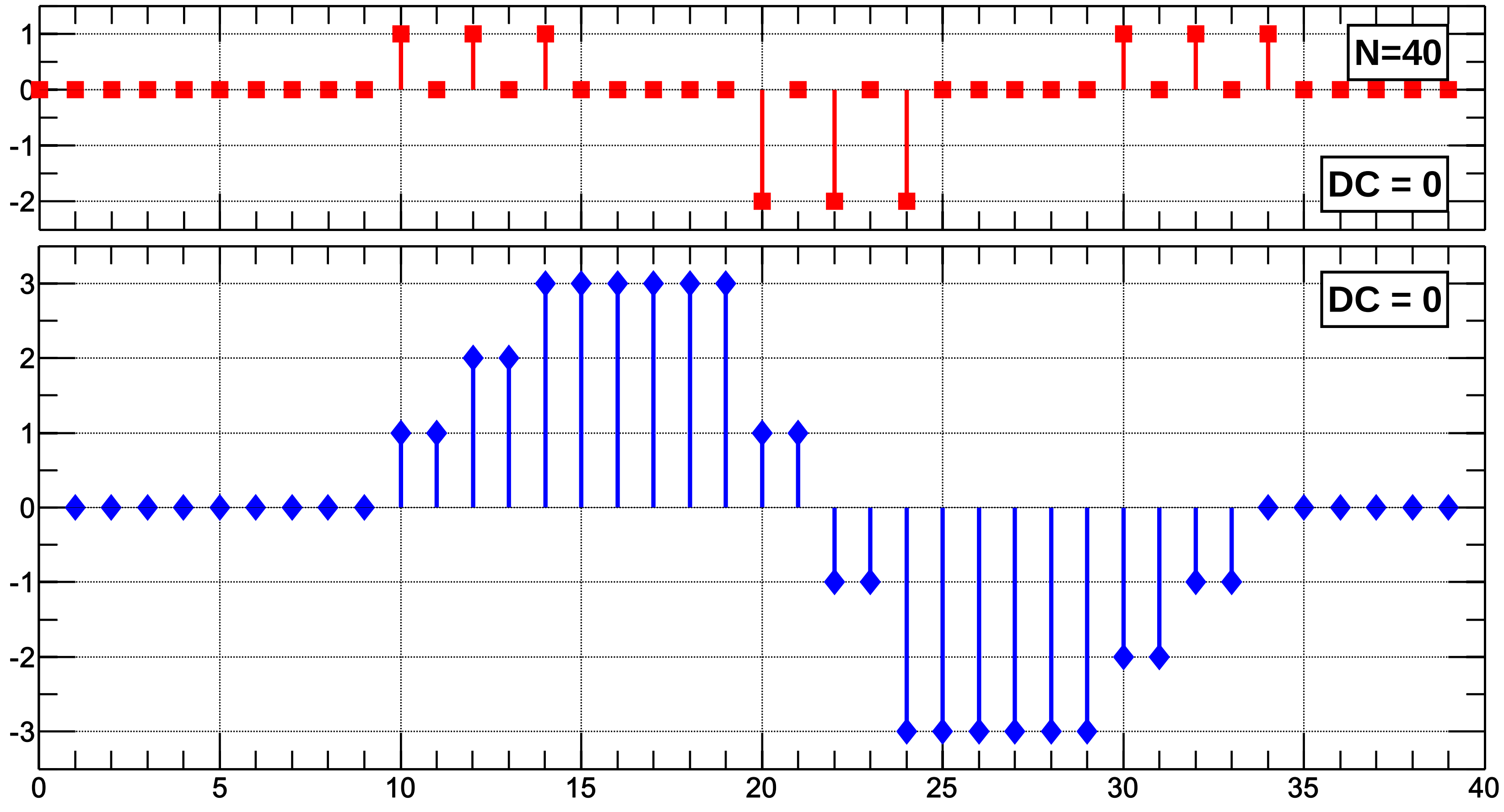
Całkowanie przez IIR (metoda trapezów, DC=0)



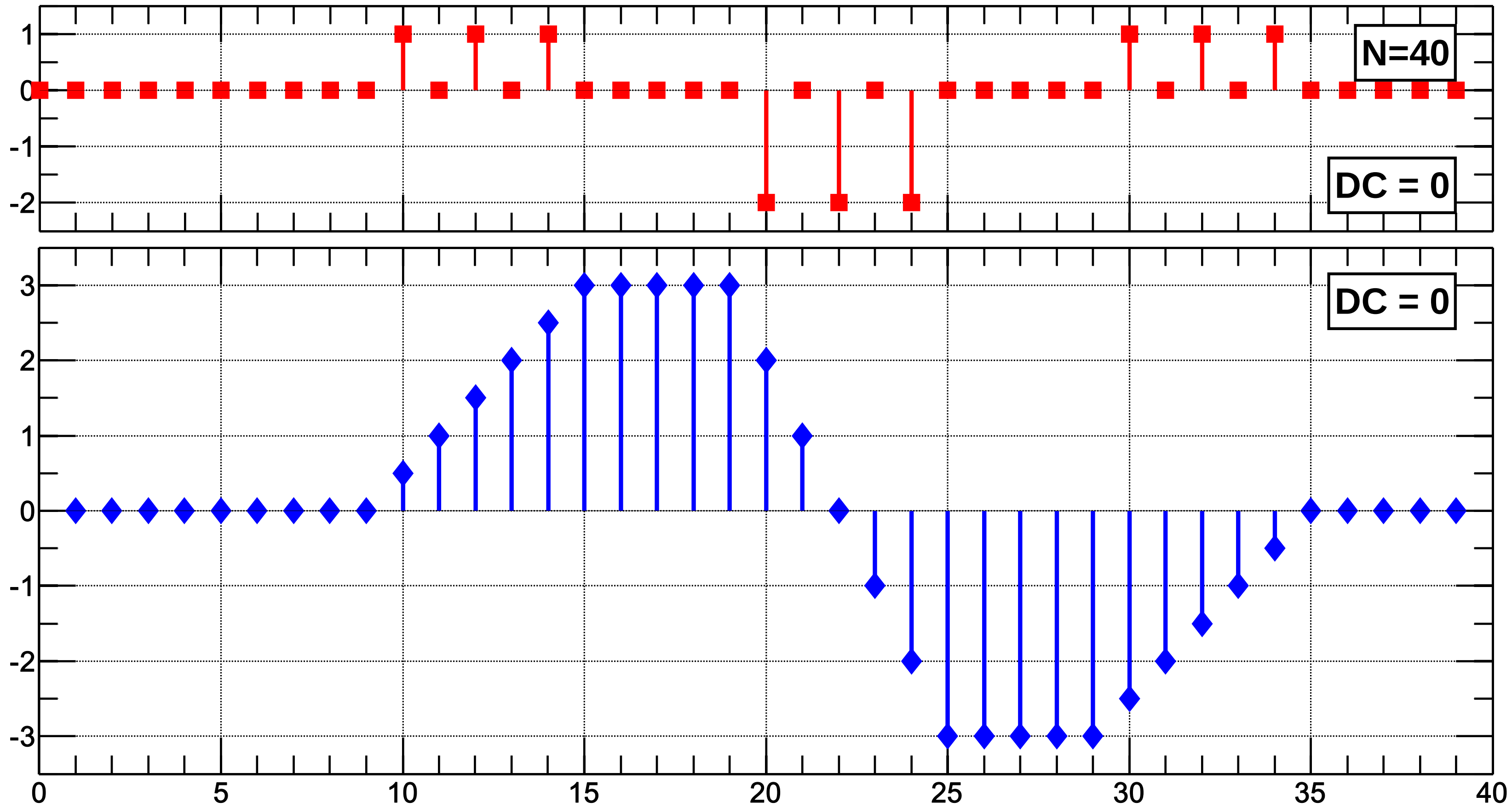
Całkowanie przez IIR
(metoda trapezów, DC≠0)



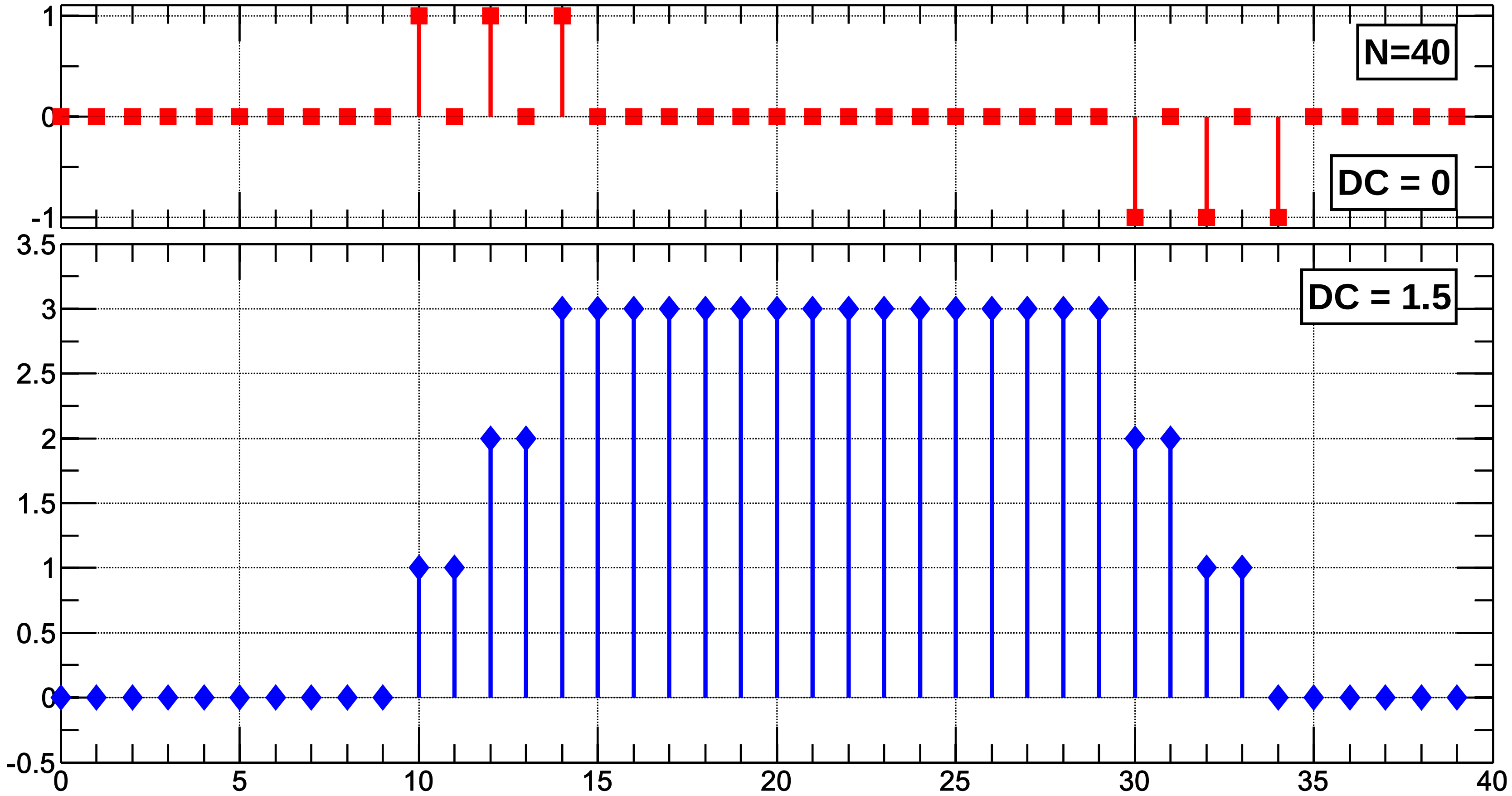
Całkowanie przez IIR metodą prostokątów



Całkowanie przez IIR metodą trapezów



Całkowanie przez IIR metodą prostokątów



Całkowanie przez IIR metodą trapezów