

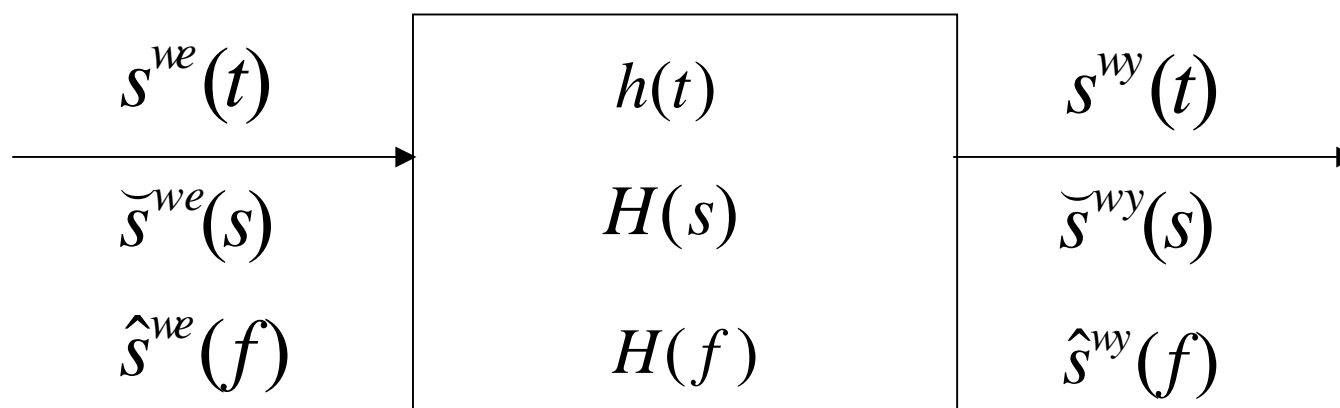


FILTRY ANALOGOWE

Spis treści

1. Modele filtrów analogowych
2. Idealny filtr dolnoprzepustowy
3. Rzeczywiste filtry dolnoprzepustowe
4. Stabilność filtrów
5. Filtr Butterwortha
6. Filtr Czebyszewa
7. Filtry eliptyczne
8. Porównanie własności filtrów rzeczywistych
9. Przekształcenie filtrów dolnoprzepustowych na filtry górnoprzepustowe, pasmowe i pasmowozaporowe.

Modele matematyczne filtrów



$h(t)$ odpowiedź impulsowa filtru

$H(s)$ transmitancja Laplace'a

$H(f)$ transmitancja Fouriera,



Modelowanie filtracji

Splot

$$s^{wy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) s^{we}(\tau) d\tau$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) s^{we}(\tau) d\tau e^{-2\pi jft} dt$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{we}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-2\pi jft} dt d\tau$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} s^{we}(\tau) e^{-2\pi jf\tau} d\tau$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = H(f) \hat{s}^{we}(f)$$

Jądro $\psi(t) = e^t$ transformacji Fouriera jest multiplikatywne, tzn.

$$\psi(t + \tau) = \psi(t) \psi(\tau)$$

Charakterystyki filtrów

$$H(f) = A(f) e^{j\varphi(f)} \in \mathbf{C}$$

gdzie $A(f) \in \mathbf{R}$ charakterystyka amplitudowa filtru,
 $\varphi(f)$ charakterystyka fazowa filtru

$$\hat{s}^{we}(f) = A^{we}(f) e^{j\varphi^{we}(f)}$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = A^{wy}(f) e^{j\varphi^{wy}(f)}$$

$$A^{wy}(f) = A(f) A^{we}(f)$$

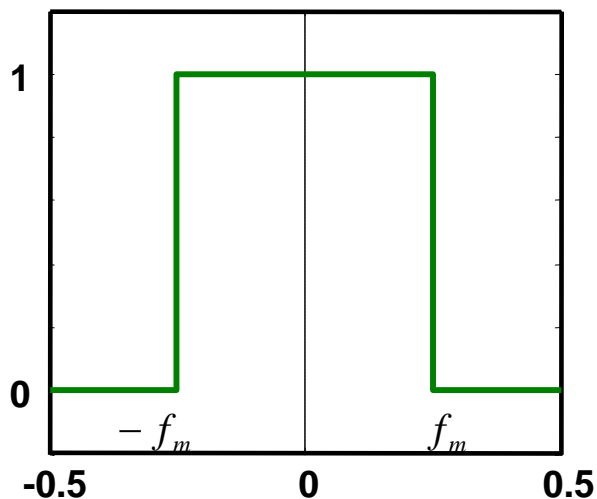
$$\varphi^{wy}(f) = \varphi(f) + \varphi^{we}(f)$$

Idealny filtr dolnoprzepustowy

$$H(f) = \begin{cases} e^{-2\pi j f t_0} & \text{dla } |f| < f_m \\ 0 & \text{dla } |f| \geq f_m \end{cases}$$

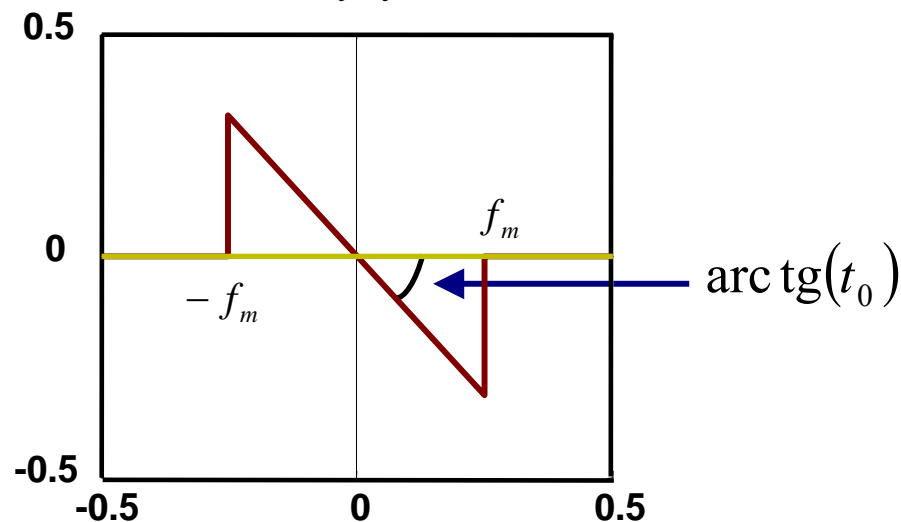
$$\varphi(f) = -2\pi t_0 f$$

charakterystyka amplitudowa

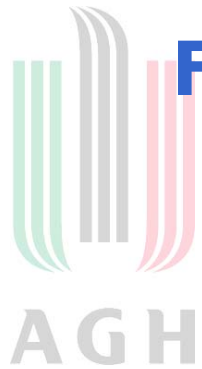


częstotliwość

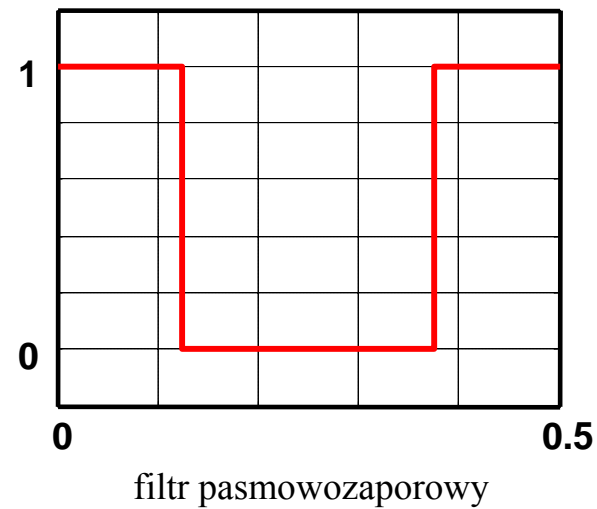
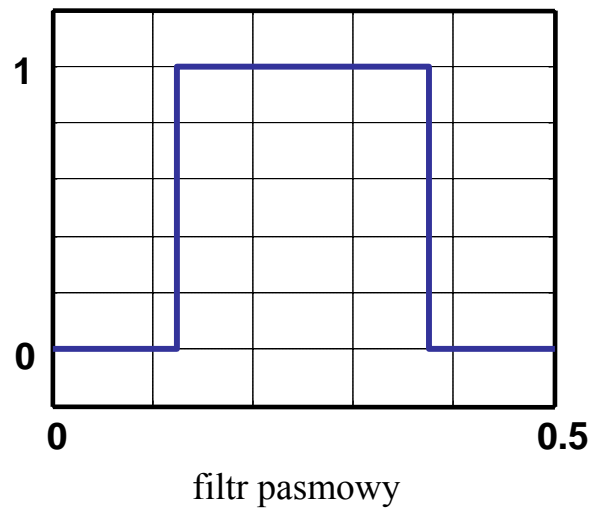
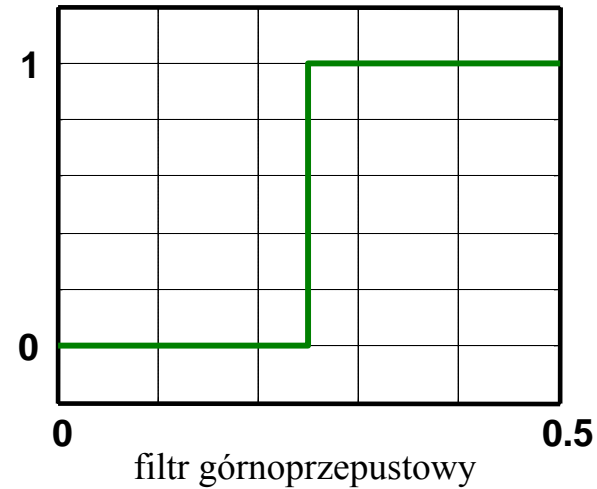
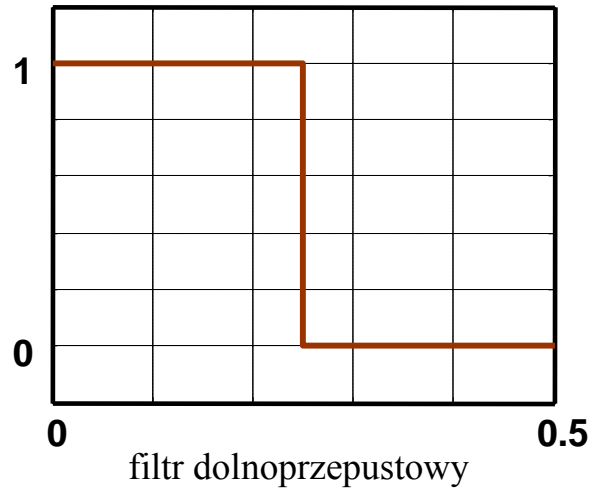
charakterystyka fazowa



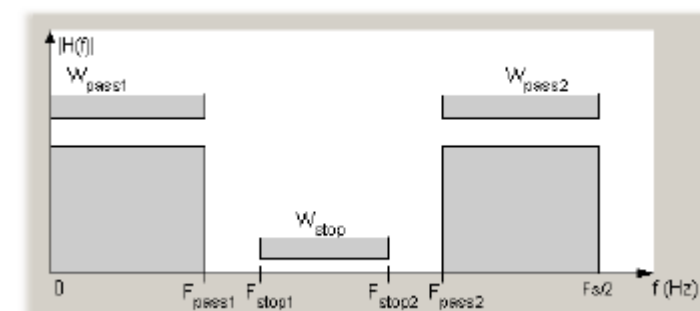
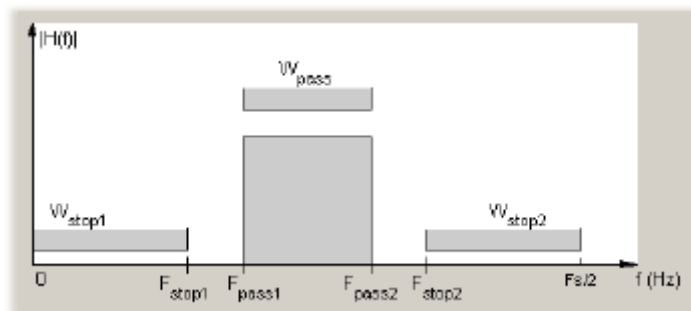
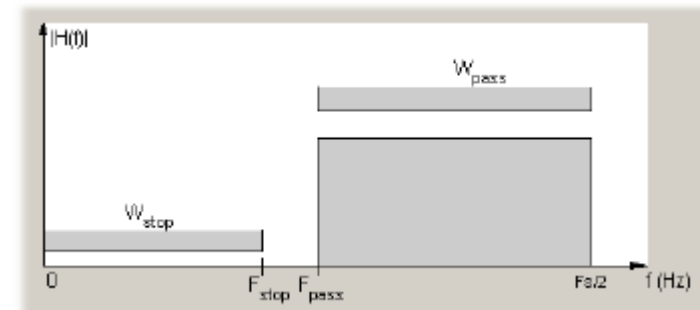
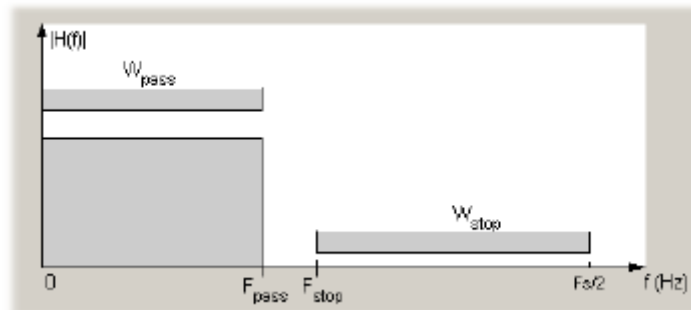
częstotliwość

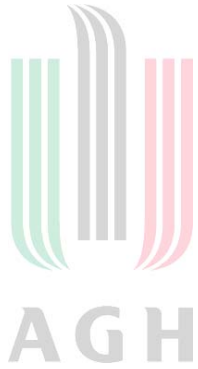


Filtry: dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, pasmowe i pasmowozaporowe



Maski do projektowania filtrów





Filtracja impulsu Diraca

Impuls Diraca $s^{we}(t) = \delta(t)$

i jego widmo $\hat{s}^{we}(f) = 1$

$$\boxed{\hat{s}^{wy}(f) = H(f)} \implies \boxed{s^{wy}(t) = h(t)}$$

Można to uzasadnić w inny sposób

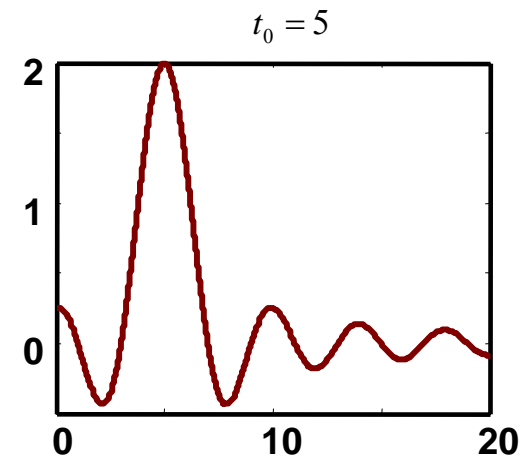
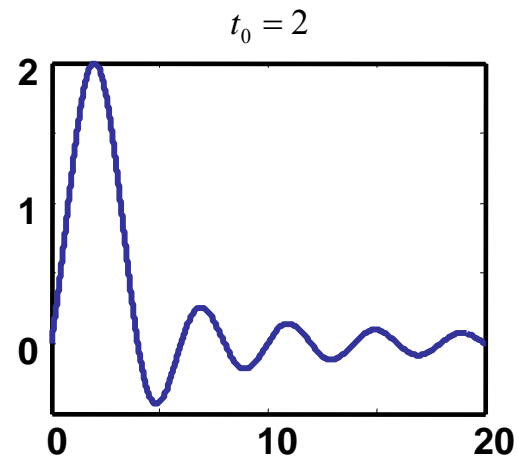
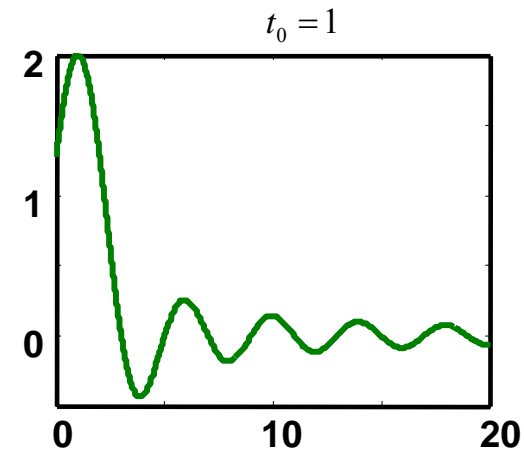
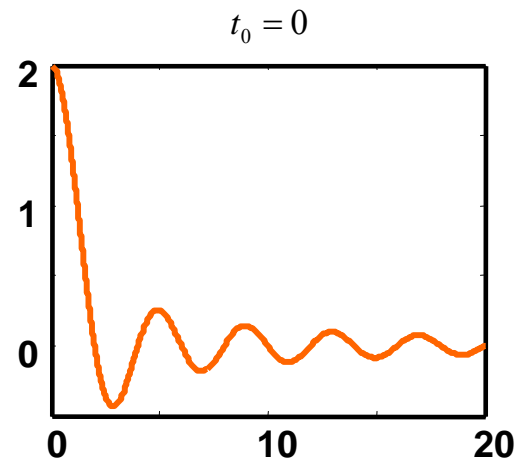
$$s^{wy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) s^{we}(\tau) d\tau$$

$$h(t - \tau) \delta(\tau) = h(t) \delta(\tau) \implies s^{wy}(t) = h(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

Bo dla $\tau \neq 0$ obie strony się zerują.

Idealny filtr dolnoprzepustowy

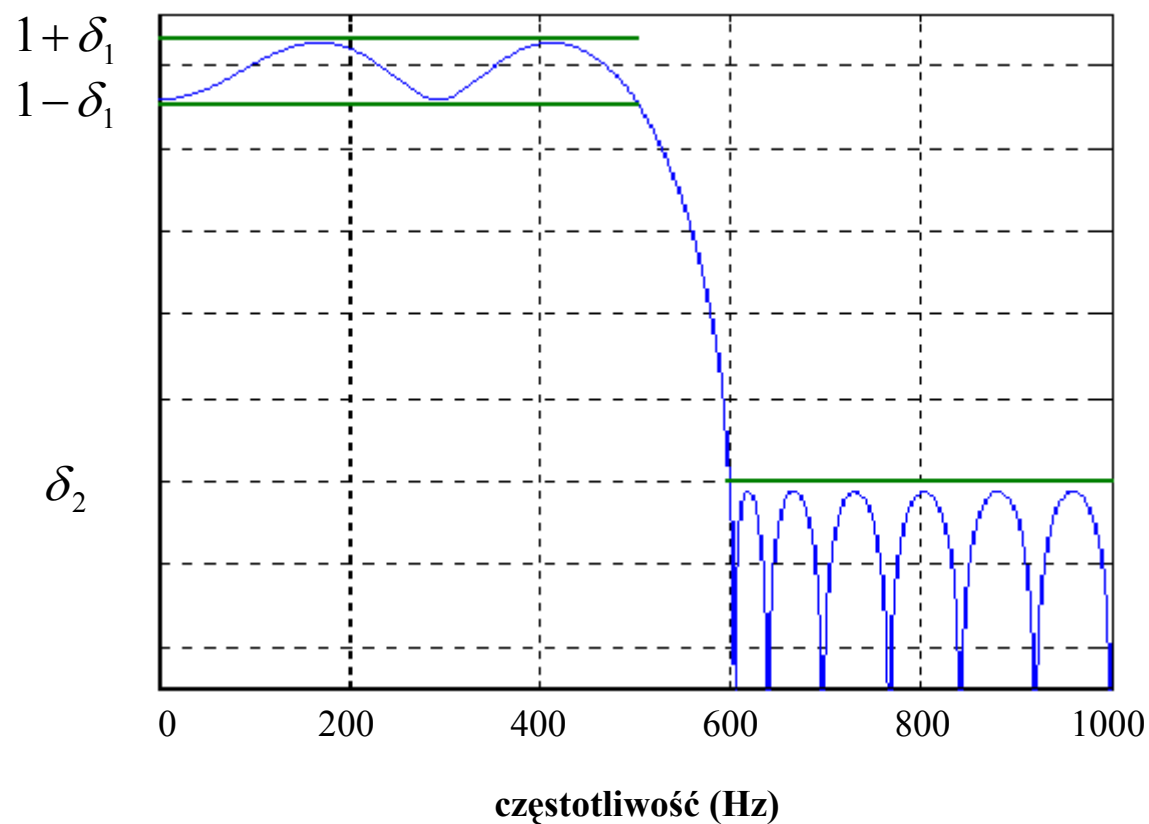
$$s^{we}(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad s^{wy}(t) = h(t) = \frac{\sin(2\pi f_m [t - t_0])}{\pi f_m (t - t_0)}$$



Rzeczywisty filtr dolnoprzepustowy

$$1 - \delta_1 \leq A(f) \leq 1 + \delta_1 \quad \text{dla } f < f_c$$

$$|A(f)| \leq \delta_2 \quad \text{dla } f > f_r$$



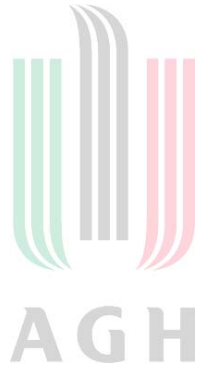
Transmitancja filtru rzeczywistego

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (2\pi j)^n f^n}{\sum_{n=0}^N b_n (2\pi j)^n f^n} = \frac{\alpha(f) + j\beta(f)}{\gamma(f) + j\eta(f)}$$

gdzie $a_m, b_n \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= a_0 - a_2 f^2 + a_4 f^4 - \dots & \beta(f) &= a_1 f - a_3 f^3 + a_5 f^5 - \dots \\ \gamma(f) &= b_0 - b_2 f^2 + b_4 f^4 - \dots & \eta(f) &= b_1 f - b_3 f^3 + b_5 f^5 - \dots \end{aligned}$$

$$H(f) = \frac{\alpha(f)\gamma(f) + \beta(f)\eta(f)}{\gamma^2(f) + \eta^2(f)} + j \frac{\beta(f)\gamma(f) - \alpha(f)\eta(f)}{\gamma^2(f) + \eta^2(f)}$$



Charakterystyka amplitudowa filtra rzeczywistego

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (2\pi j)^n f^n}{\sum_{n=0}^N b_n (2\pi j)^n f^n} = \frac{\alpha(f) + j\beta(f)}{\gamma(f) + j\eta(f)}$$

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = \frac{\alpha^2(f) + \beta^2(f)}{\gamma^2(f) + \eta^2(f)}$$

gdzie

$$H^*(f) = \frac{\alpha(f)\gamma(f) + \beta(f)\eta(f)}{\gamma^2(f) + \eta^2(f)} - j \frac{\beta(f)\gamma(f) - \alpha(f)\eta(f)}{\gamma^2(f) + \eta^2(f)}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{c_0 + \sum_{n=1}^N c_n f^{2n}}{d_0 + \sum_{n=1}^N d_n f^{2n}}$$

gdzie

$$c_n = \sum_{i=0}^{2n} a_i a_{2n-i} (-1)^{\text{int}(i/2) + \text{int}(i-\frac{1}{2})}$$

$$d_n = \sum_{i=0}^{2n} b_i b_{2n-i} (-1)^{\text{int}(i/2) + \text{int}(i-\frac{1}{2})}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$\text{int}(x)$ jest częścią całkowitą z liczby x



Zależności między współczynnikami

$$c_0 = a_0^2$$

$$c_1 = a_1^2 - 2a_0a_2$$

$$c_2 = -2a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2$$

$$c_3 = -2a_0a_6 + 2a_1a_5 - 2a_2a_4 + a_3^2$$

... ..

$$d_0 = b_0^2$$

$$d_1 = b_1^2 - 2b_0b_2$$

$$d_2 = -2b_0b_4 - 2b_1b_3 + b_2^2$$

$$d_3 = -2b_0b_6 + 2b_1b_5 - 2b_2b_4 + b_3^2$$

... ..

Definicja stabilności filtrów

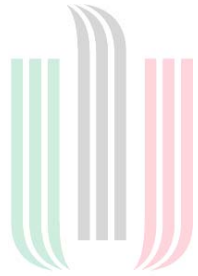
Jeżeli istnieją stałe $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$ takie, że z ograniczoności sygnału wejściowego

$$\|s^{we}\| \leq c_1$$

wynika ograniczoność sygnału wyjściowego

$$\|s^{wy}\| \leq c_2$$

to filtr nazywamy *stabilnym*. Jeżeli dodatkowo dla sygnału wejściowego zerującego się od pewnej chwili czasu, tzn. spełniającego warunek $s^{we}(t) = 0$ dla $t > T$, sygnał wyjściowy z filtru zanika, tzn. $s^{wy}(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$, to taki filtr nazywamy *asymptotycznie stabilnym*. ■



AGH

Twierdzenie o stabilności filtrów

Jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu

$$\sum_{n=0}^N b_n s^n = 0$$

mają ujemne części rzeczywiste to wtedy i tylko wtedy filtr o transmitancji

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (2\pi j)^n f^n}{\sum_{n=0}^N b_n (2\pi j)^n f^n}$$

jest asymptotycznie stabilny





Filtr Butterwortha

Butterworth 1930 rok

$$|H(0)| = 1 \Rightarrow c_0 = d_0 = 1 \text{ bo}$$

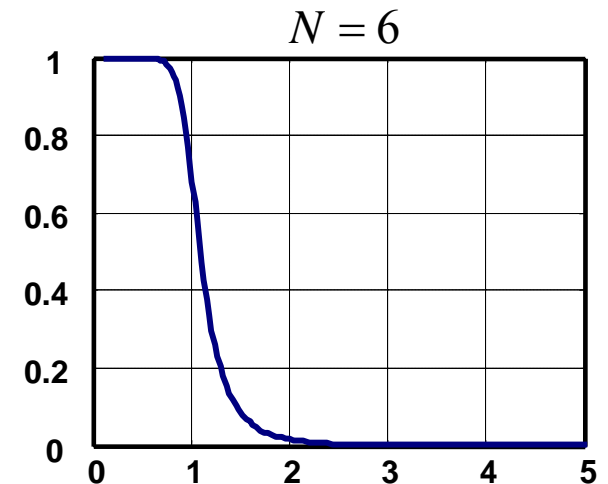
$$|H(f)|^2 = \frac{c_0 + \sum_{n=1}^N c_n f^{2n}}{d_0 + \sum_{n=1}^N d_n f^{2n}}$$

Aby charakterystyki były maksymalnie płaskie dla $f = 0$

potrzeba i wystarcza, aby $c_n = d_n$ dla $n=1,2,\dots,(N-1)$

Maksymalnie płaskie dla $f \rightarrow \infty$ będą wtedy

i tylko wtedy, gdy $c_n = 0$ dla $n=1,2,\dots,N$.





Charakterystyka amplitudowa filtru Butterwortha

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + d_N f^{2N}}$$

$d_N > 0$ aby $|H(f)|^2 > 0$ dla $f > 0$

$$d_N = \frac{1}{f_c^{2N}}$$

f_c częstotliwość odcięcia

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (f/f_c)^{2N}}}$$



Charakterystyka częstotliwościowa filtru Butterwortha

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n j^n f^n}{\sum_{n=0}^N b_n j^n f^n}$$

$$a_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, \dots, N$$

$$d_N \neq 0 \Rightarrow \text{przynajmniej niektóre} \quad b_n \neq 0$$

czyli

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N b_n j^n f^n}$$

Przykład filtru Butterwortha, rząd trzeci

$$|H(f)|^2 = \frac{c_0 + \sum_{n=1}^N c_n f^{2n}}{d_0 + \sum_{n=1}^N d_n f^{2n}}$$

Jaka jest transmitancja filtru Butterwortha rzędu $N=3$
z częstotliwością odcięcia $f_c = 1$?

Otrzymujemy :

- 1) $c_0 = d_0 = 1$ aby filtr miał wzmocnienie 1 dla częstotliwości $f = 0$
- 2) $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$ aby charakterystyka filtru była maksymalnie płaska dla $f = 0$
- 3) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ aby filtr był maksymalnie płaski dla bardzo dużych częstotliwości
- 4) $d_3 = 1$ z tematu zadania.
- 5) $c_n = d_n = 0$ dla $n > 3$ bo filtr ma być rzędu 3.

Kontynuacja przykładu

$$\begin{aligned}
 1 &= a_0^2 & 1 &= b_0^2 \\
 0 &= a_1^2 - 2a_0a_2 & 0 &= b_1^2 - 2b_0b_2 \\
 0 &= a_2^2 - 2a_1a_3 & 0 &= b_2^2 - 2b_1b_3 \\
 0 &= a_3^2 & 1 &= b_3^2
 \end{aligned}$$

$$H(f) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n j^n f^n}{\sum_{n=0}^N b_n j^n f^n}$$

$$a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = 1, b_0 = 1, b_3 = 1$$

$$0 = b_1^2 - 2b_2$$

$$0 = b_2^2 - 2b_1$$

$$b_1 = b_2 = 2$$

$b_n > 0$ aby spełnić warunek konieczny stabilności. ■



Transmitancja Laplace'a filtru Butterwortha

AGH

Podstawiając $f = \frac{s}{2\pi j}$

otrzymujemy $H(s) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{(2\pi)^n} s^n}$ $|H(s)|^2 = H(s)H^*(s)$

ma $2N$ biegunów, połowa pochodzi od $H(s)$ a druga połowa od $H^*(s)$

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{s}{2\pi f_c} \right)^{2N}}$$

Rozmieszczenie biegunów transmitancji Laplace'a

$$\left(\frac{s_n}{2\pi f_c}\right)^{2N} = -1 = e^{j(2n-1)\pi} \quad \text{dla } n=1,2,\dots,2N \quad N \text{ parzyste}$$

czyli $\frac{s_n}{2\pi f_c} = e^{j\frac{(2n-1)\pi}{2N}}$

a stąd $s_n = 2\pi f_c [\cos((n-0,5)\pi / N) + j \sin((n-0,5)\pi / N)]$

$$\left(\frac{s_n}{2\pi f_c}\right)^{2N} = 1 = e^{j2n\pi} \quad \text{dla } n=1,2,\dots,2N \quad N \text{ nieparzyste}$$

$$s_n = 2\pi f_c [\cos(n\pi / N) + j \sin(n\pi / N)] \quad \text{dla } n=1,2,\dots,2N$$

Jeżeli rząd filtra jest nieparzysty $s_{2N} = 2\pi f_c$ oraz $s_{(N+1)/2} = -2\pi f_c$

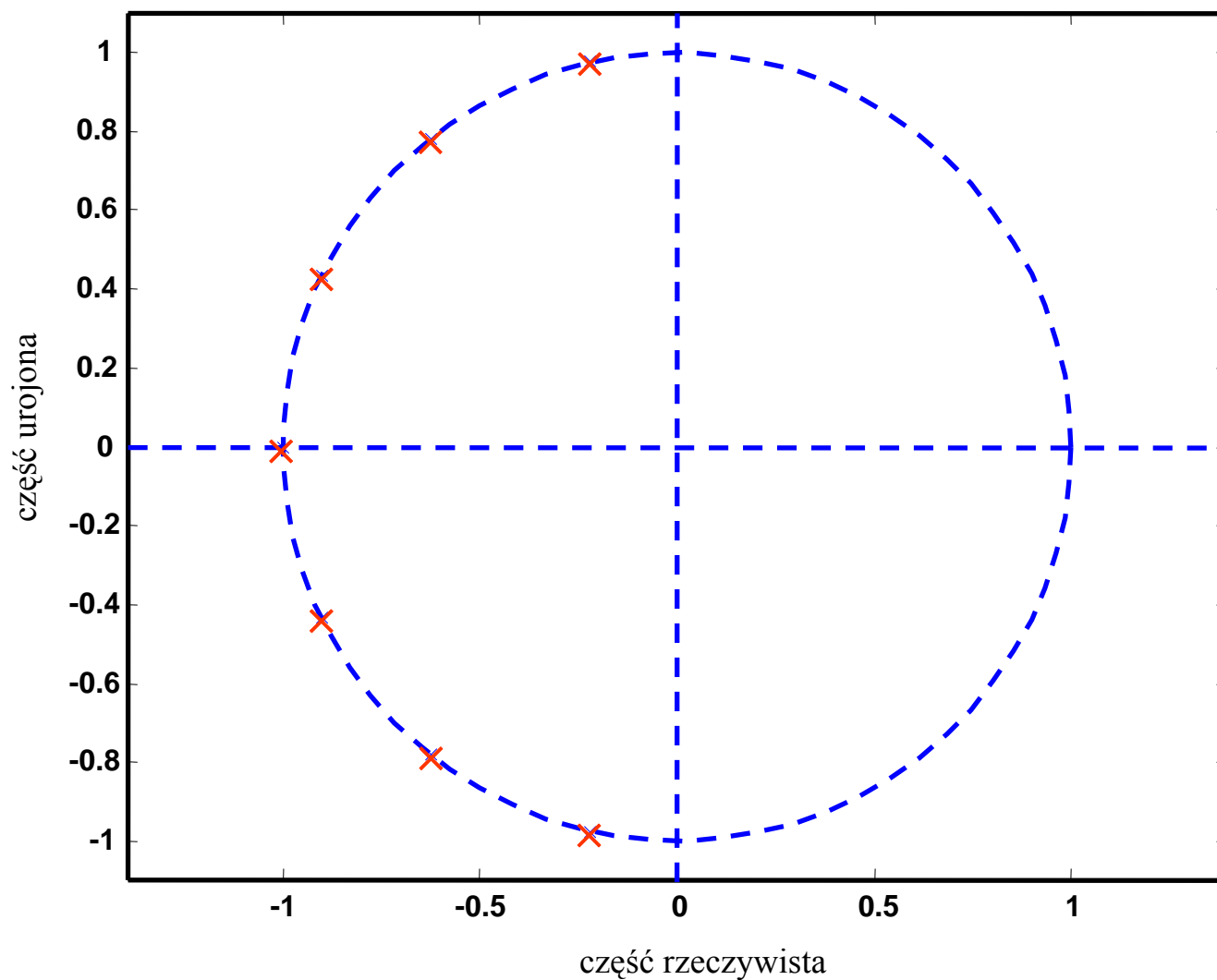


Transmitancja Laplace'a filtru Butterwortha

Transmitancja filtru Butterwortha rzędu N -tego

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (s - s_n)}$$

Bieguny dolnoprzepustowego filtra Butterwortha siódmego rzędu





Przykład filtru Butterwortha, rząd drugi

Dla filtru Butterwortha drugiego rzędu z częstotliwością odcięcia $f_c = 0,5 / \pi$ otrzymujemy cztery bieguny charakterystyki amplitudowej

$$s_1 = \cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$$

$$s_2 = \cos(3\pi/4) + j \sin(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$$

$$s_3 = \cos(5\pi/4) + j \sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$$

$$s_4 = \cos(7\pi/4) + j \sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$$

Transmitancje filtru Butterwortha drugiego rzędu

$$H(s) = \frac{1}{(s + \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)(s + \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$H(\underline{f}) = \frac{1}{(j\underline{f} + \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)(j\underline{f} + \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2)} = \frac{1}{1 - \underline{f}^2 + j\sqrt{2}\underline{f}}$$

gdzie $\underline{f} = f / f_c$

$$H(\underline{f}) = \frac{1 - \underline{f}^2}{1 + \underline{f}^4} - j \frac{\sqrt{2}\underline{f}}{1 + \underline{f}^4}$$

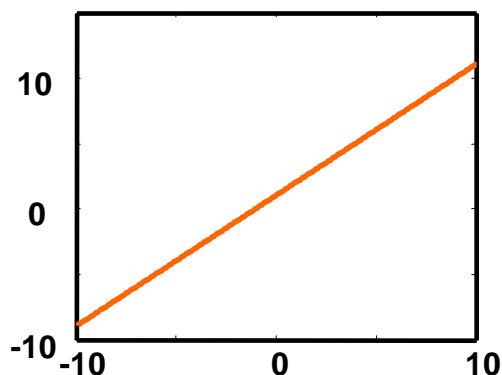
$$|H(\underline{f})|^2 = \frac{1}{1 + \underline{f}^4}$$



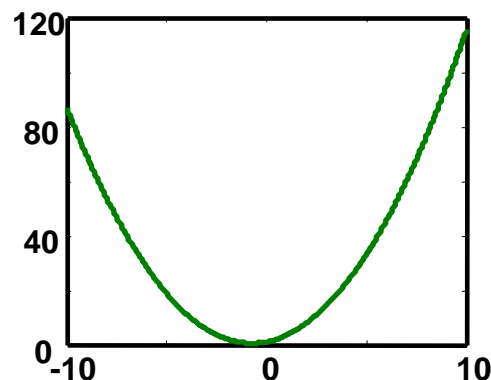
Wielomiany charakterystyczne filtrów Butterwortha

- 1) $1 + s$
- 2) $1 + \sqrt{2}s + s^2$
- 3) $(1 + s)(1 + s + s^2) = 1 + 2s + 2s^2 + s^3$
- 4) $(1 + 1,848s + s^2)(1 + 0,765s + s^2) = 1 + 2,613s + 3,414s^2 + 2,613s^3 + s^4$

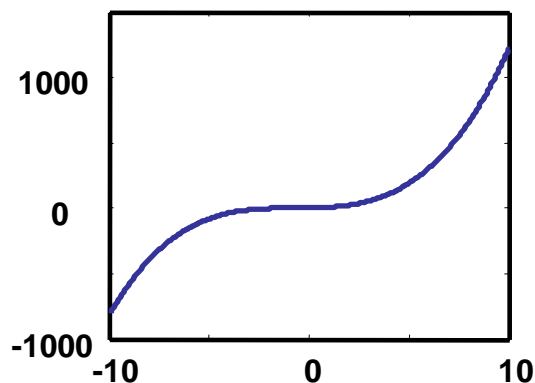
$N = 1$



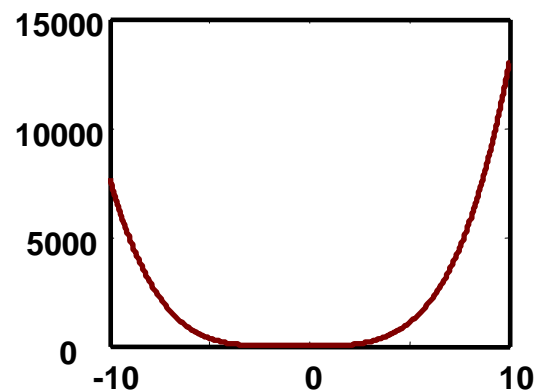
$N = 2$



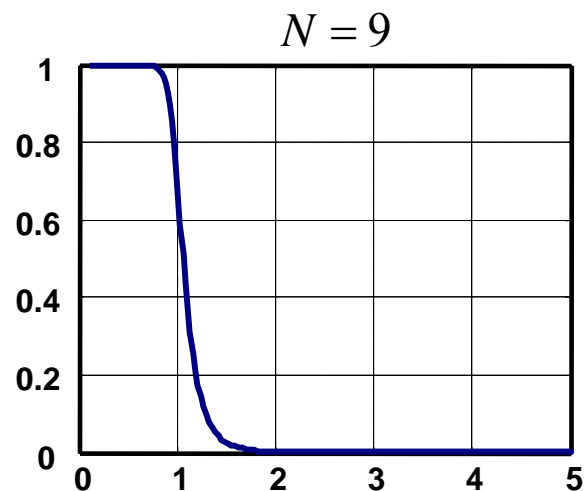
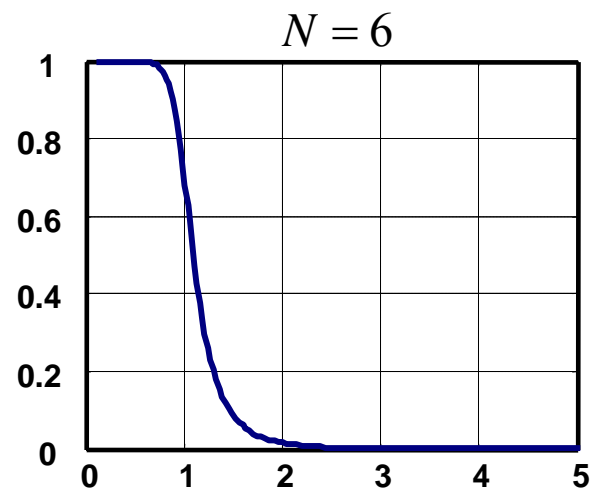
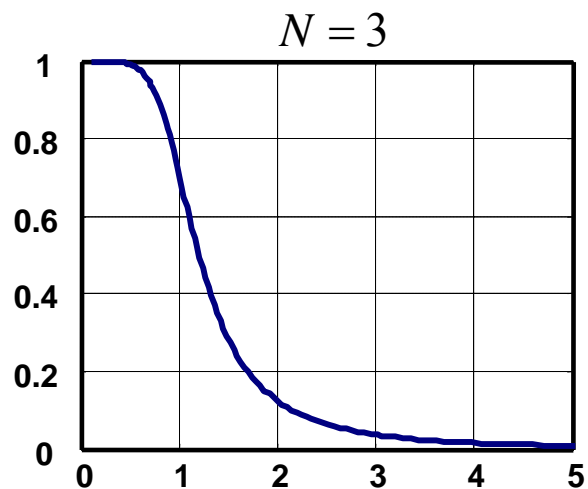
$N = 3$



$N = 4$



Charakterystyki amplitudowe filtrów Butterwortha rzędu 3, 6 i 9





Założenia projektowe dla filtrów

δ_1 - dopuszczalna odchyłka charakterystyki w paśmie przewodzenia,

δ_2 - dopuszczalna odchyłka w paśmie tłumienia,

f_c - końcowa częstotliwość pasma przewodzenia,

f_r - początkowa częstotliwość pasma tłumienia.

Własności filtrów Butterwortha

$$|H(0)| = 1$$

$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (f/f_c)^{2N}}}$$

$$|H(f_c)| = 1 - \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0,29$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{1 + (f_r/f_c)^{2N}}$$

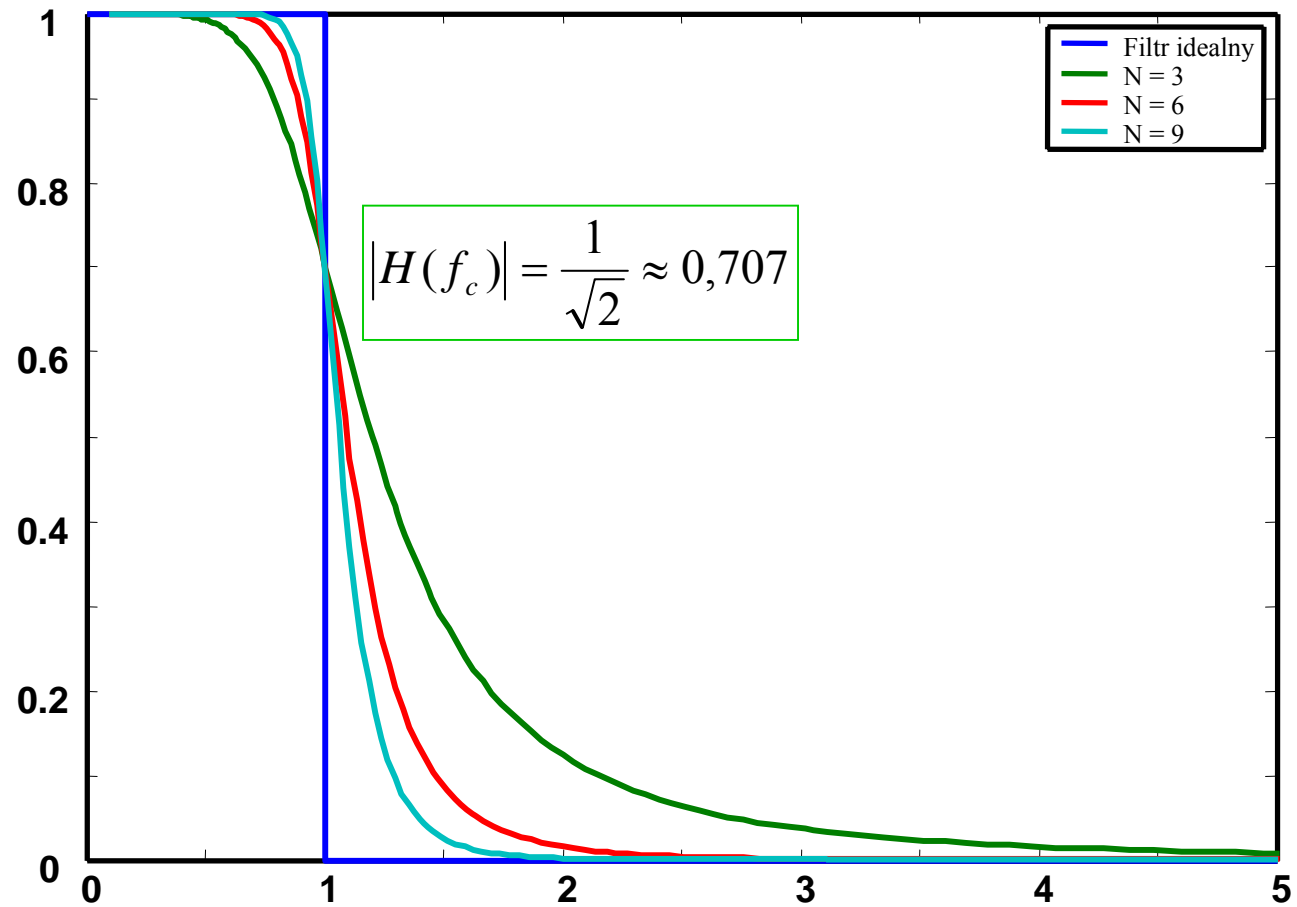
zatem $\left(\frac{f_r}{f_c}\right)^{2N} = \frac{1 - \delta_2^2}{\delta_2^2}$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log([1 - \delta_2^2]/\delta_2^2)}{\log(f_r/f_c)}$$

$$|H(f)| \approx \left(\frac{f_c}{f}\right)^N$$

dla $f \gg f_c$

Wykresy charakterystyk amplitudowych filtrów Butterwortha





Odpowiedzi impulsowe filtru Butterwortha

AGH

Rząd drugi i trzeci

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^{-t/\sqrt{2}} \sin(t/\sqrt{2}) & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^{-t} + e^{-0,5t} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Filtry Czebyszewa

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(f/f_c)}}$$

gdzie T_N są wielomianami Czebyszewa rzędu N

$$T_N(\underline{f}) = \underline{f}^N - \binom{N}{2} \underline{f}^{N-2} (1 - \underline{f}^2) + \binom{N}{4} \underline{f}^{N-4} (1 - \underline{f}^2)^2 - \binom{N}{6} \underline{f}^{N-6} (1 - \underline{f}^2)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} \frac{N! \underline{f}^{N-2n} (f^2 - 1)^n}{2n!(N-2n)!}$$

gdzie

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$\underline{f} = f / f_c$$



Wielomiany Czebyszewa

Pafnutij Czebyszew

ur. 1821 Okatów k/Moskwy zm. 1894 Sankt Petersburg

$$T_0(\underline{f}) = 1$$

$$T_1(\underline{f}) = \underline{f}$$

$$T_2(\underline{f}) = 2\underline{f}^2 - 1$$

$$T_3(\underline{f}) = 4\underline{f}^3 - 3\underline{f}$$

$$T_4(\underline{f}) = 8\underline{f}^4 - 8\underline{f}^2 + 1$$

$$T_5(\underline{f}) = 16\underline{f}^5 - 20\underline{f}^3 + 5\underline{f}$$

$$T_6(\underline{f}) = 32\underline{f}^6 - 48\underline{f}^4 + 18\underline{f}^2 - 1$$

$$T_7(\underline{f}) = 64\underline{f}^7 - 112\underline{f}^5 + 56\underline{f}^3 - 7\underline{f}$$

$$T_8(\underline{f}) = 128\underline{f}^8 - 256\underline{f}^6 + 160\underline{f}^4 - 32\underline{f}^2 + 1$$

$$T_9(\underline{f}) = 256\underline{f}^9 - 576\underline{f}^7 + 432\underline{f}^5 - 120\underline{f}^3 + 9\underline{f}$$

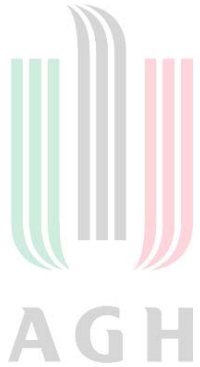
$$T_{10}(\underline{f}) = 512\underline{f}^{10} - 1280\underline{f}^8 + 1120\underline{f}^6 - 400\underline{f}^4 + 50\underline{f}^2 - 1$$

$$T_{N+1}(\underline{f}) = 2\underline{f}T_N(\underline{f}) - T_{N-1}(\underline{f})$$

Wykresy wielomianów Czebyszewa

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(f/f_c)}}$$





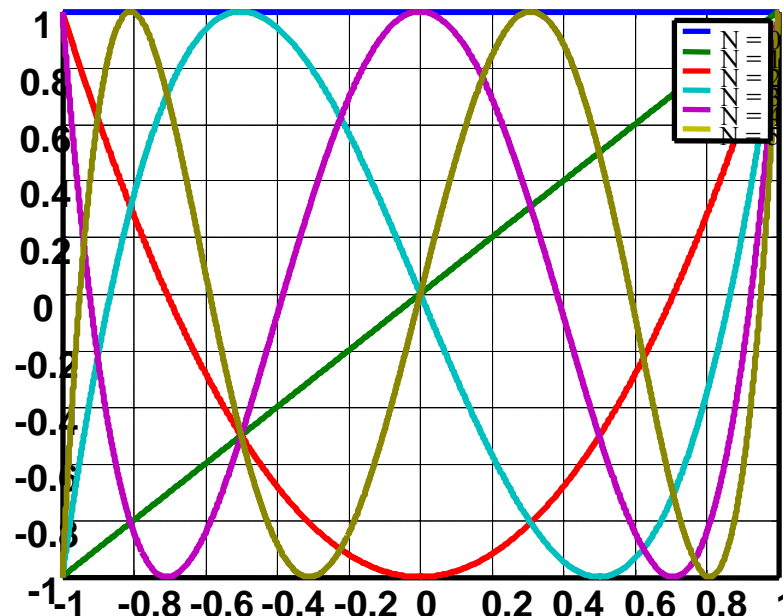
Rozmieszczenie zer i ekstremów wielomianów Czebyszewa

N pierwiastków w przedziale $-1 < \underline{f}_n < 1$ przy czym

$$\underline{f}_n = \cos(\pi(2n-1)/2N) \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots, N$$

Wszystkie ekstrema, których liczba wynosi $N-1$ znajdują się w przedziale $-1 \leq \underline{f}^{eks} \leq 1$ i spełniają warunki

$$\underline{f}_n^{eks} = \cos(n\pi/N) \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots, N-2$$



Ekstrema wielomianów Czebyszewa

Dla maksimumów $T_N(\underline{f}^{\max}) = 1$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(f/f_c)}}$$

natomiast dla minimumów $T_N(\underline{f}^{\min}) = -1$

$$T_N(0) = \begin{cases} -1 & \text{dla } N = 2, 6, 10, \dots \\ 0 & \text{dla } N \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } N = 0, 4, 8, \dots \end{cases}$$

$$T_N(1) = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_N(\underline{f}) = \infty$$



Założenia projektowe filtrów Czebyszewa w paśmie przewodzenia

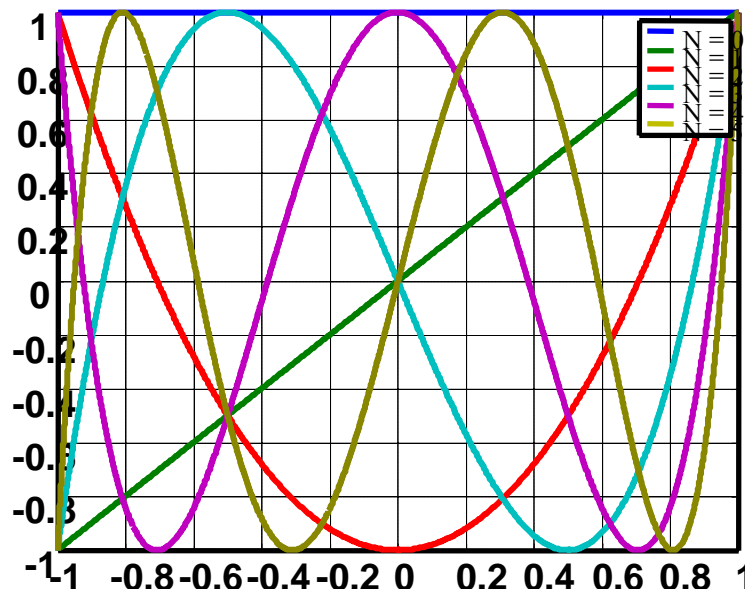
AGH

Projektowanie filtru Czebyszewa pierwszego rodzaju :

- δ_1 dopuszczalna odchyłka w paśmie przewodzenia,
- f_c i f_r graniczne wartości pasma przejściowego filtru.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \geq 1 - \delta_1 \quad \text{zatem} \quad \varepsilon^2 \leq \frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \quad \text{ale gdy } \varepsilon = 0 \quad \text{to } |H(f)| = 1$$

Odchyłki pomiędzy ekstremalnymi wartościami charakterystyki w paśmie przewodzenia wynoszą $1 - 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}$



$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(f/f_c)}}$$

Założenia projektowe filtrów Czebyszewa w paśmie zaporowym

AGH

Projektowanie filtru Czebyszewa pierwszego rodzaju :

- δ_2 dopuszczalna odchyłka w paśmie tłumienia,
- f_c i f_r graniczne wartości pasma przejściowego filtru.

$$\text{Dla } \underline{f} > 1 \quad T_N(\underline{f}) = \cosh(N \operatorname{arccosh}(\underline{f}))$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cosh^2(N \operatorname{arccosh}(f_r/f_c))} \leq \delta_2^2$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{1 - \delta_2^2}}{\varepsilon \delta_2}\right)}{\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{f_r}{f_c}\right)}$$



$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(f/f_c)}}$$



Moduł transmitancji Laplace'a filtru Czebyszewa

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2 \left(\frac{-js}{2\pi f_c} \right)}$$

bo

$$f = \frac{s}{2\pi j}$$



Rozmieszczenie biegunów transmitancji Laplace'a filtrów Czebyszewa

Dla $s < 1$

$$T_N(s) = \cos(N \arccos(s))$$

$$\varepsilon^2 \cos^2 \left(N \arccos \left(\frac{-js_n}{2\pi f_c} \right) \right) = -1 \quad \text{dla } n=1,2,\dots,2N$$

czyli

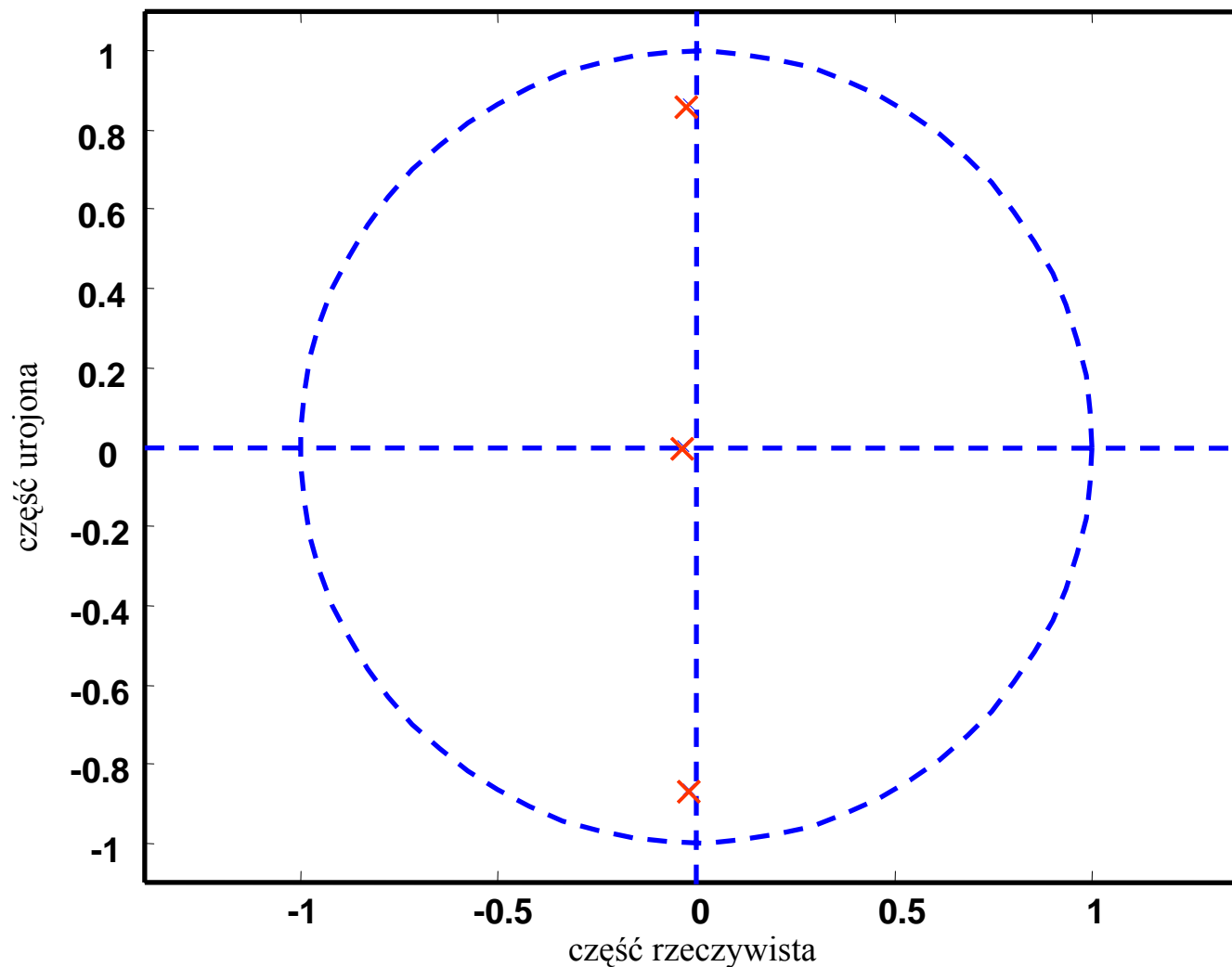
$$\cos \left(N \arccos \left(\frac{-js_n}{2\pi f_c} \right) \right) = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$$s_n = 2\pi f_c (\sinh(\alpha) \cos(\beta_n) + j \cosh(\alpha) \sin(\beta_n))$$

gdzie

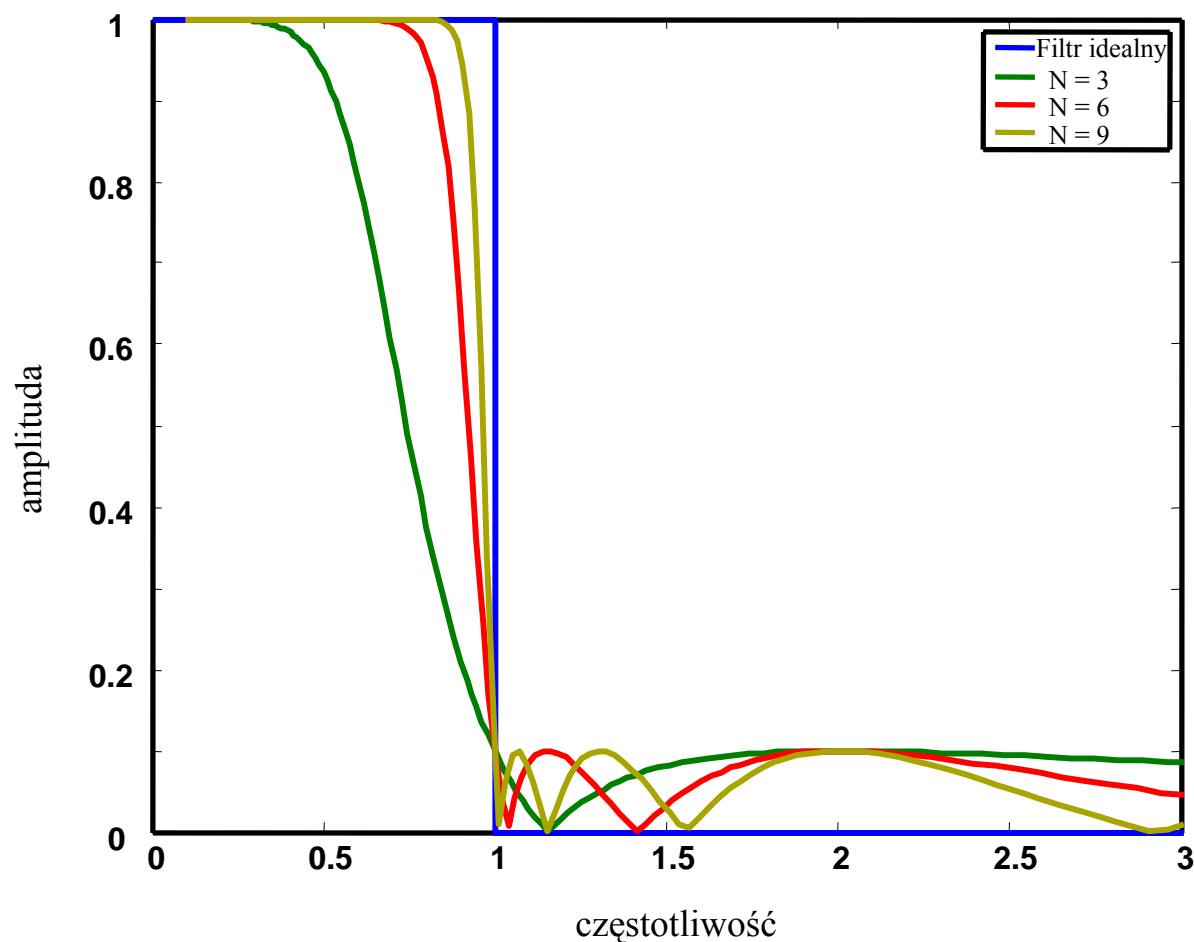
$$\alpha = \frac{1}{N} \operatorname{arcsinh}(1/\varepsilon) \quad \beta_n = \frac{2n + N - 1}{2n} \pi \quad n=1,2,\dots,2N$$

Wykres rozmieszczenia biegunów filtru trzeciego rzędu



Filtry Czebyszewa drugiego rodzaju

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 / T_N^2(f_r / f)}$$



Filtry eliptyczne

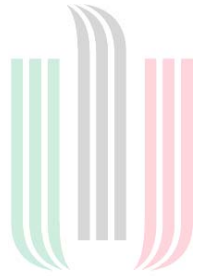
Cauer w 1931 roku

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(f/f_c)}}$$

$$\underline{f} = f / f_c$$

gdzie

$$U_N(\underline{f}) = \begin{cases} \frac{\underline{f}(f_1^2 - \underline{f}^2)(f_2^2 - \underline{f}^2) \cdots (f_{2N}^2 - \underline{f}^2)}{(1 - f_1^2 \underline{f}^2)(1 - f_2^2 \underline{f}^2) \cdots (1 - f_{2N}^2 \underline{f}^2)} & \text{dla } N \text{ nieparzystego} \\ \frac{(f_1^2 - \underline{f}^2)(f_2^2 - \underline{f}^2) \cdots (f_{2N-1}^2 - \underline{f}^2)}{(1 - f_1^2 \underline{f}^2)(1 - f_2^2 \underline{f}^2) \cdots (1 - f_{2N-1}^2 \underline{f}^2)} & \text{dla } N \text{ parzystego} \end{cases}$$



AGH

Bieguny i zera filtrów eliptycznych

Wartości funkcji $U_N(\underline{f})$ w przedziale $0 \leq \underline{f} < 1$ są odwrotnościami jej wartości dla $1 < \underline{f} \leq \infty$ czyli

$$U_N(1/\underline{f}) = \frac{1}{U_N(\underline{f})}$$

W szczególności bieguny $U_N(\underline{f})$ są odwrotnościami zer.

Wszystkie bieguny znajdują się w przedziale $1 < \underline{f} \leq \infty$
natomiast zera są ulokowane w zakresie $0 \leq \underline{f} < 1$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(f/f_c)}}$$



Projektowanie filtrów eliptycznych

Rząd filtru wyznacza się z zależności

$$N \geq \frac{K(k) K(\sqrt{1-\delta^2})}{K(\delta) K(\sqrt{1-k^2})}$$

gdzie $k = f_c/f_r$ jest współczynnikiem pasma przejściowego,
natomiast

$$\delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2^2 - 1}}$$

Funkcja $K(\cdot)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2(\varphi)}}$$



Wyznaczanie biegunów transmitancji $H(s)$

$$\operatorname{re}(s_n) = f_c \frac{\operatorname{sn}(q, k') \operatorname{cn}(q, k') \operatorname{dn}(r_n, k) \operatorname{dn}(r_n, k)}{1 - \operatorname{sn}^2(q, k') \operatorname{dn}^2(r_n, k)}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad \operatorname{im}(s_n) = f_c \frac{\operatorname{dn}(q, k') \operatorname{sn}(r_n, k)}{1 - \operatorname{sn}^2(q, k') \operatorname{dn}^2(r_n, k)}$$

$\operatorname{sn}(r, k)$ jest sinusem eliptycznym Jacobiego zmiennej r i dlatego jest równy funkcji odwrotnej do

$$r = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad \text{gdzie } y = \operatorname{sn}(r, k)$$

$\operatorname{cn}(r, k)$ jest kosinusem eliptycznym Jacobiego, zatem spełnia tożsamość

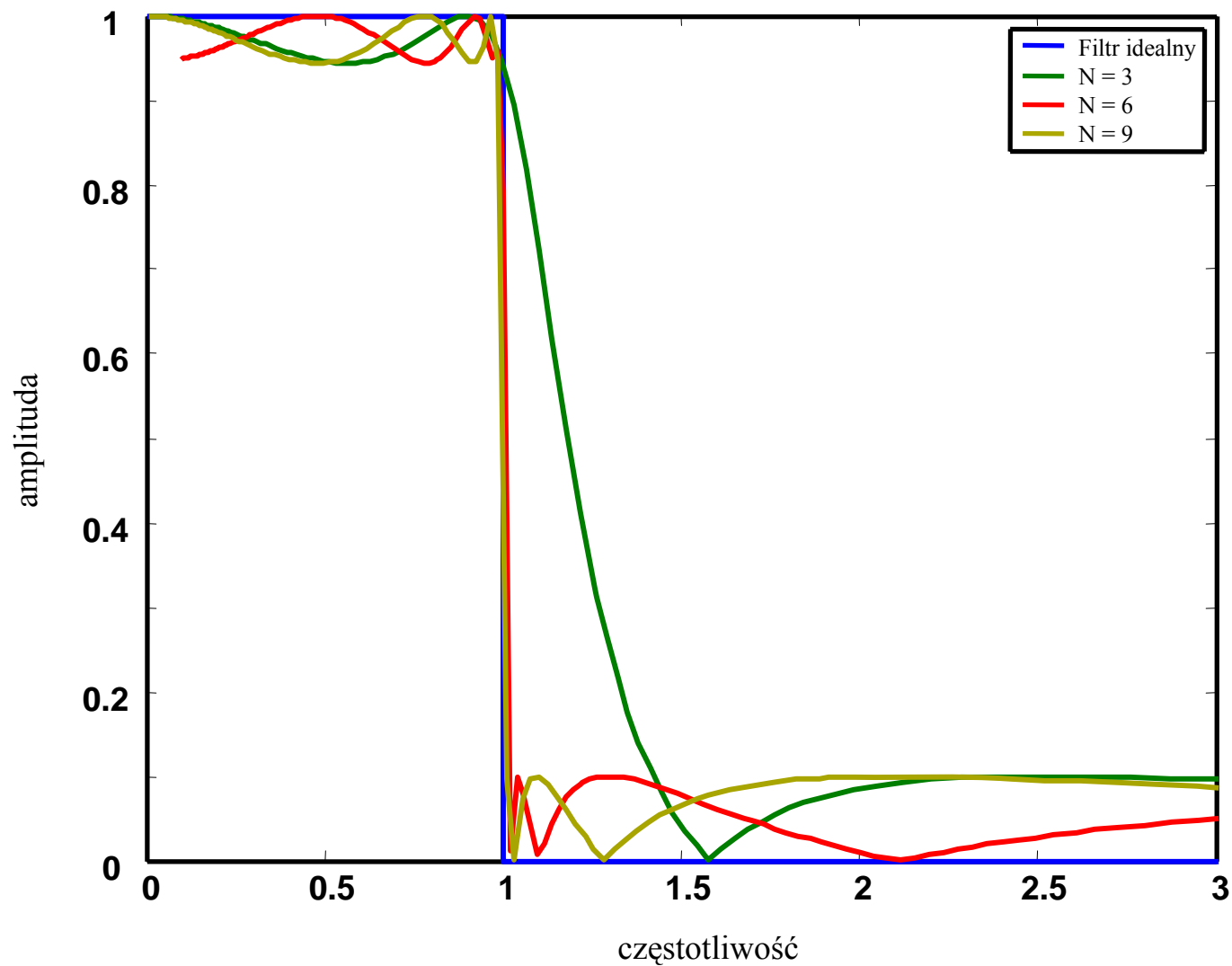
$$\operatorname{cn}^2(r, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(r, k)$$

$\operatorname{dn}(r, k)$ jest deltą amplitudy Jacobiego

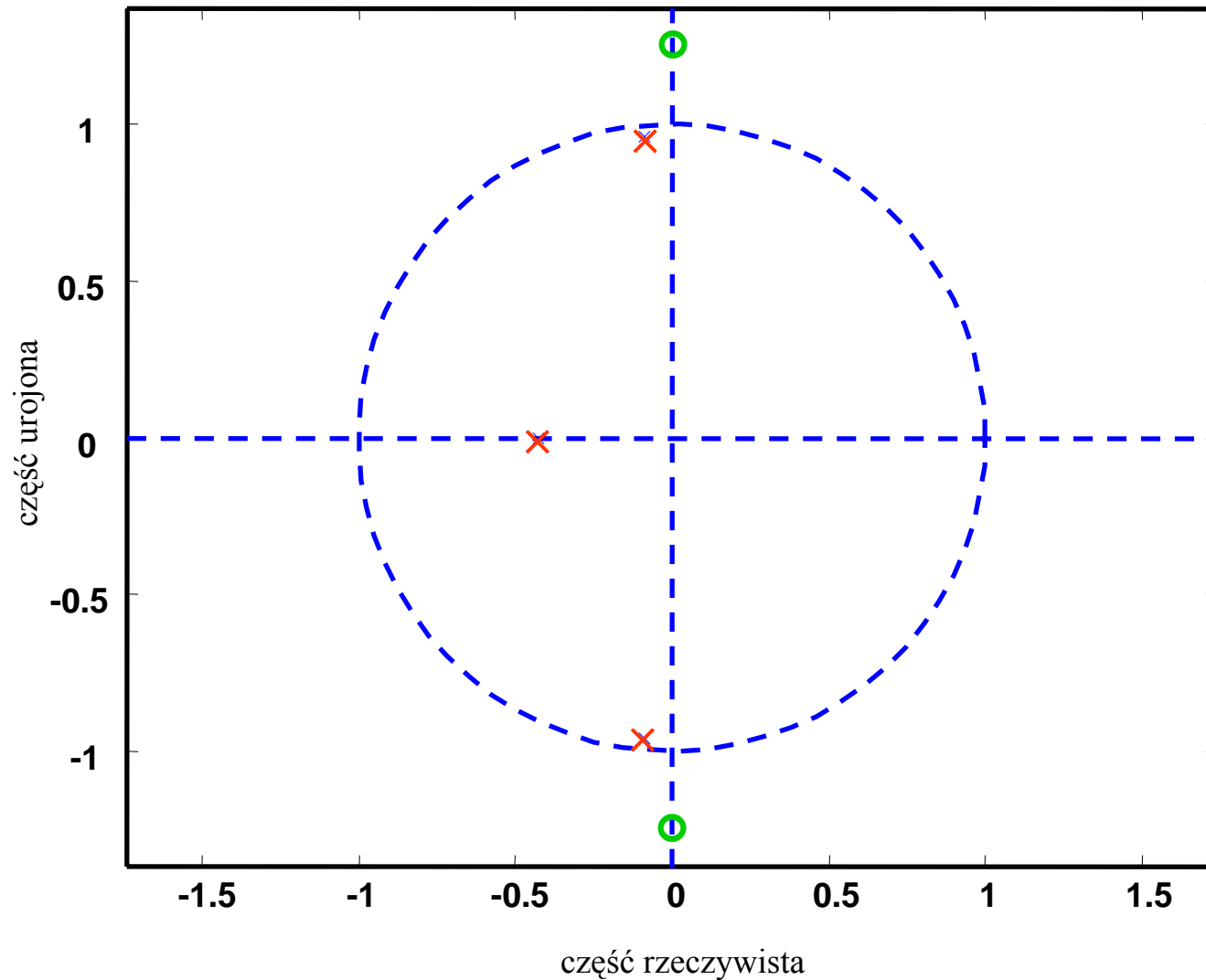
$$\operatorname{dn}^2(r, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(r, k)$$

$$q = -j \frac{K(k)}{N K(\delta)} \operatorname{sn}^{-1}(j/\delta_1, \delta) \quad r_n = -K(k) + \frac{K(k)}{N} (1 + 2n)$$

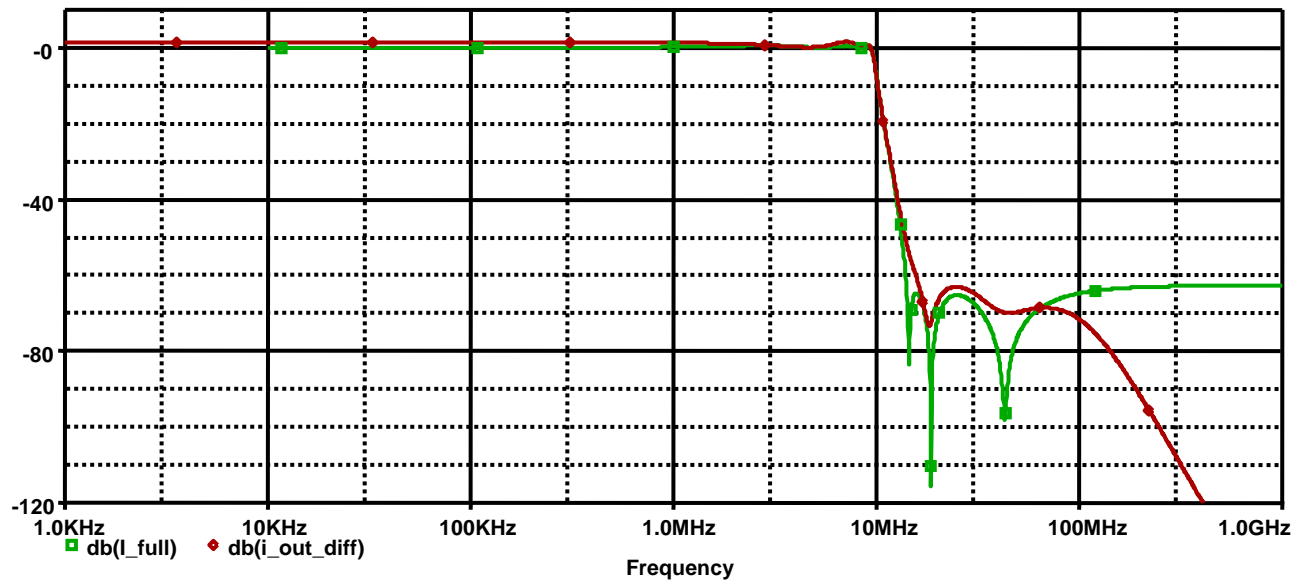
Wykresy charakterystyk amplitudowych filtrów eliptycznych



Wykres rozmieszczenia zer i biegunów filtru eliptycznego



Charakterystyki filtrów eliptycznego 6-tego rzędu



- według modelu matematycznego
- rzeczywista



Porównanie własności filtrów rzeczywistych

Dobierając filtry mamy do dyspozycji następujące parametry:

a) dla filtru Butterwortha tylko dwa parametry:

f_c - częstotliwość odcięcia,
 N - rząd filtru.

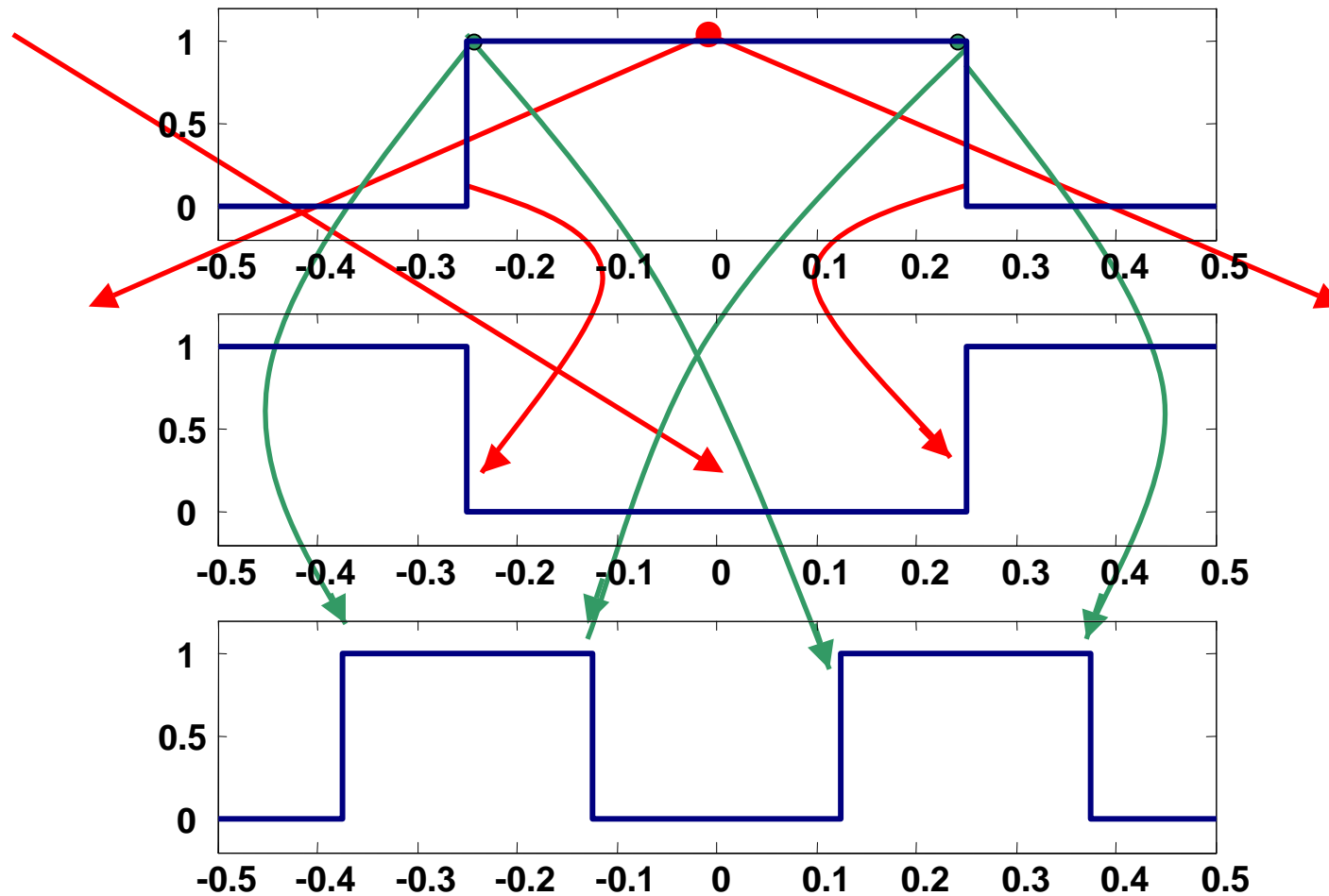
b) dla filtru Czebyszewa trzy parametry:

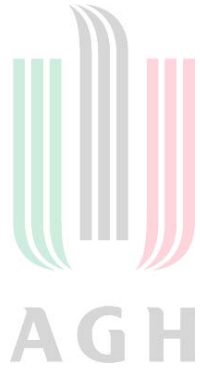
f_c - częstotliwość odcięcia,
 N - rząd filtru.
 δ_1 lub δ_2 - wielkość zafalowań.

c) dla filtrów eliptycznych cztery parametry:

f_c, f_r - początek i koniec pasma przejściowego,
 N - rząd filtru.
 δ_1 i δ_2 - wielkość zafalowań.

Przekształcanie filtrów dolnoprzepustowych na filtry górnoprzepustowe i pasmowe





Przekształcenie filtrów dolnoprzepustowych na filtry górnoprzepustowe

Niech filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia f_c^d ma postać $H^d(s^d)$, przez podstawienie

$$s^d = \frac{4\pi^2 f_c^d f_c^g}{s^g}$$

otrzymamy filtr górnoprzepustowy $H^g(s^g)$. Podstawiając

$s^d = 2\pi j f_c^d$ i $s^g = 2\pi j f_c^g$ otrzymujemy

$$f_c^d = -\frac{f_c^d f_c^g}{f_c^g}$$

Dla częstotliwości odcięcia filtru dolnoprzepustowego $f_c^d = f_c^d$

otrzymujemy $f_c^g = -f_c^g$, czyli częstotliwość odcięcia filtru górnoprzepustowego. Punkt $f_c^d = 0$ zostaje przekształcony

w punkt $f_c^g = +\infty$ lub $f_c^g = -\infty$, natomiast punkt $f_c^d = \infty$

ulega przekształceniu w $s^g = 0$.



Przekształcenie filtrów dolnoprzepustowych na filtry pasmowe

Granice przewodzenia filtru pasmowego oznaczmy przez f_1 i f_2 przy czym $f_1 < f_2$. Filtr dolnoprzepustowy można przekształcić w filtr pasmowy przy pomocy przekształcenia

$$s^d = \frac{f_c^d}{f_2 - f_1} \left(s^p + \frac{4\pi^2 f_1 f_2}{s^p} \right)$$

Podstawiając $s^d = 2\pi j f^d$ i $s^p = 2\pi j f^p$ otrzymujemy

$$f^d = \frac{f_c^d}{f_2 - f_1} \left(f^p - \frac{f_1 f_2}{f^p} \right)$$

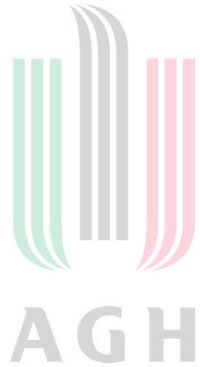
Wstawiając do powyższej zależność $f^p = f_1$ otrzymujemy

$$f^d = -f_c^d \quad \text{a dla } f^p = f_2 \text{ otrzymujemy } f^d = f_c^d.$$

Charakterystyka filtru dolnoprzepustowego dla $f^d = 0$

zostanie przekształcona w charakterystykę dla punktu $f^p = \sqrt{f_1 f_2}$.

W punkcie $f^p = 0$ otrzymamy $f^d = -\infty$ czyli filtr pasmowy tłumi składowe stałe sygnałów.



Przekształcenie filtrów dolnoprzepustowych na filtry pasmowozaporowe

Aby otrzymać filtr pasmowozaporowy stosujemy przekształcenie

$$s^d = f_c^d (f_2 - f_1) \frac{4\pi^2 s^b}{s^b + 4\pi^2 f_1 f_2}$$

Podstawiając do powyższego wzoru $s^d = 2\pi j f^d$ oraz $s^b = 2\pi j f^b$ otrzymujemy

$$f^d = f_c^d (f_2 - f_1) \frac{f^b}{f_1 f_2 - (f^b)^2}$$

Z zależności tej wynikają następujące wnioski :

$$f^b = f_1 \Rightarrow f^d = f_c^d$$

$$f^b = f_2 \Rightarrow f^d = -f_c^d$$

$$f^b = 0 \Leftrightarrow f^d = 0$$

$$f^b = \infty \Rightarrow f^d = 0$$

$$f^d = \infty \Rightarrow f^b = \sqrt{f_1 f_2}$$