



# PODSTAWY TEORII FALEK

ang. **wavelet**

## Spis treści

1. Geneza aproksymacji falkami
2. Falki generujące przestrzeń sygnałów
3. Zastosowanie falek do wieloskładnikowej analizy sygnałów
4. Transformacja falkowa
5. Dekompozycja obrazów



# Szeregi Fouriera

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{i} \quad \psi(t) = \sin(2\pi t/T) \quad \text{w} \quad L^2(0, T)$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi m t / T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi m t / T)$$

$$f_m = m/T$$

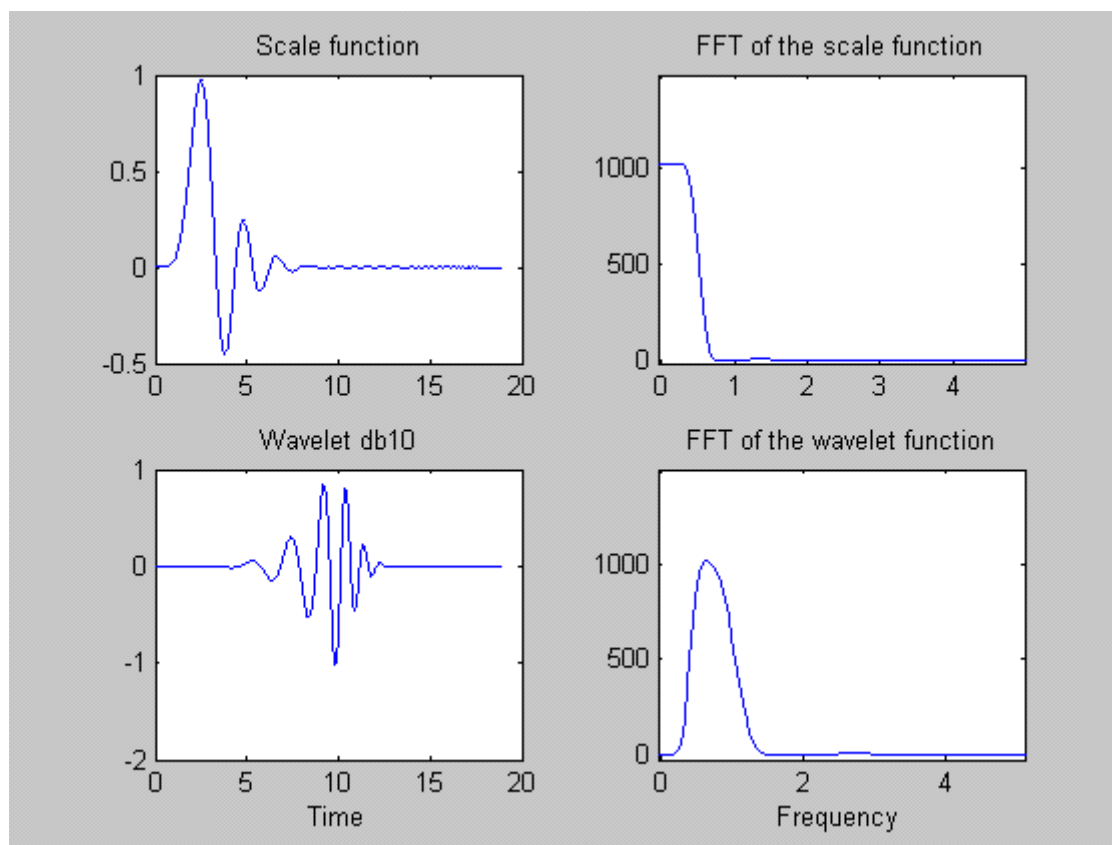
$$\psi_{m,1}(t) = \cos(2\pi m t / T)$$

$$\psi_{m,2}(t) = \sin(2\pi m t / T)$$

$$\text{supp } \psi_{m,i} \stackrel{df}{=} \overline{\{t : \psi_{m,i} \neq 0\}} \quad \text{dla} \quad m \in \mathbf{Z} \quad \text{oraz} \quad i = 1, 2$$

Funkcje okresowe w  $L^2(\mathfrak{R})$

## Przykład falki i funkcji skalującej



Funkcja skalująca i falka Daubechies i ich widma



## Generacja rodziny falek

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

gdzie

$$a > 0 \quad b \in \mathfrak{R}$$

$$\|\psi_{a,b}\| = 1 \quad \text{jeżeli tylko} \quad \|\psi\| = 1$$

# Falki generujące przestrzeń sygnałów

Strömberg

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$a = 2^{-m} \quad \text{oraz} \quad b = 2^{-m} n$$

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad m, n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

binarne wydłużenie  $2^m$  (*ang. binary dilation*)

i diadyczne przesunięcie  $2^{-m} n$  (*ang. dyadic translation*)

$$\|\psi(2^m \bullet - n)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^m t - n) dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{m}{2}} \|\psi\|$$



## Falki ortonormalne

Symbol Kroneckera na  $Z \times Z$

$$\delta_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = l \\ 0 & \text{dla } m \neq l \end{cases}$$

*Definicja 1.*

Rodzinę falek  $\{\psi_{m,n}\}$  nazywać będziemy ortonormalną, jeśli dla zdefiniowanych powyżej falek będą spełnione warunki

$$\langle \psi_{m,n}, \psi_{k,l} \rangle = \delta_{m,k} \delta_{n,l} \quad m, n, k, l \in Z.$$



# Funkcje skalujące

$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m t - n) \quad \text{gdzie } m, n \in \mathbf{Z}$$

$\{\varphi_{m,n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  generują zbiory  $\mathcal{S}_m$



## Postulaty Mallata i Meyera

- 1)  $\cdots S_{-1} \subset S_0 \subset S_1 \cdots$
- 2)  $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S_m} = L^2(\mathfrak{R})$
- 3)  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} S_m = \{0\}$
- 4)  $S_{m+1} = S_m \oplus W_m \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}$
- 5)  $s(\cdot) \in S_m \Leftrightarrow s(2\cdot) \in S_{m+1} \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}$





# Dekompozycja i rekonstrukcja sygnałów

$$\mathcal{S}_{m+1} = \mathcal{S}_m \oplus \mathcal{W}_m$$

$$\varphi_{m+1,2n}(t) = \sum_k \left( h_k \varphi_{m,n+k}(t) + g_k \psi_{m,n+k}(t) \right)$$

$$\psi_{m,n}(t) = \sum_k \tilde{g}_{k-2n} \varphi_{m+1,k}(t)$$

$$\varphi_{m,n}(t) = \sum_k \tilde{h}_{k-2n} \varphi_{m+1,k}(t)$$

Dekompozycja sygnałów:  $\{\{g_k\}, \{h_k\}\}$  Rekonstrukcja:  $\{\{\tilde{g}_k\}, \{\tilde{h}_k\}\}$  .

Sygnał  $s_{m+1} \in \mathcal{S}_{m+1}$  może być przedstawiony w postaci szeregu

$$s_{m+1}(t) = \sum_n c_{m+1,n} \varphi_{m+1,n}(t)$$

gdzie  $\{\varphi_{m+1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  generuje zbiór  $\mathcal{S}_{m+1}$

# Dekompozycja sygnałów

$$s_{m+1}(t) = s_m(t) + w_m(t)$$

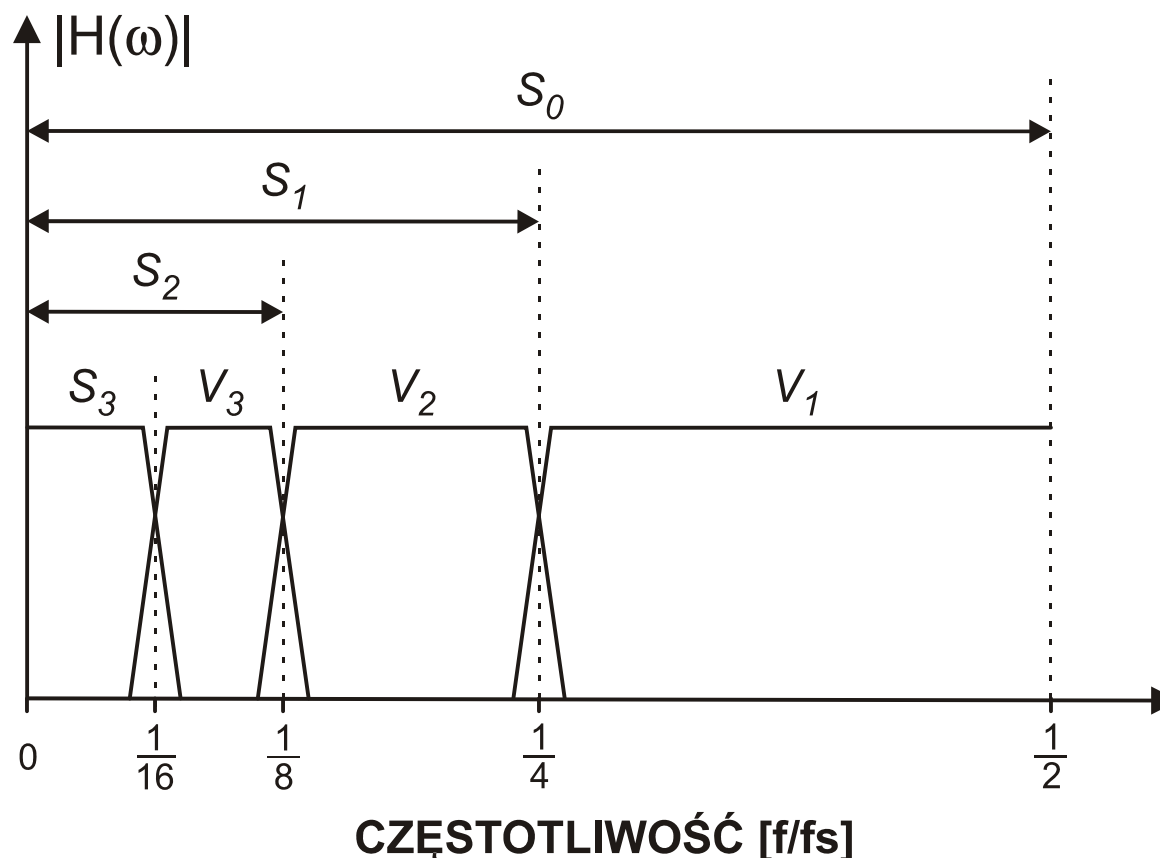
$$s_m \in \mathcal{S}_m \quad \text{i} \quad w_m \in \mathcal{W}_m$$

$$s_m(t) = \sum_n c_{m,n} \varphi_{m,n}(t)$$

$$w_m(t) = \sum_n d_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Gdzie  $c_{m,n}$  i  $d_{m,n}$  są odpowiednio dobranymi współczynnikami,  
 $\{\varphi_{m,n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  generuje zbiór  $\mathcal{S}_m$  natomiast  $\{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  generuje zbiór  $\mathcal{W}_m$

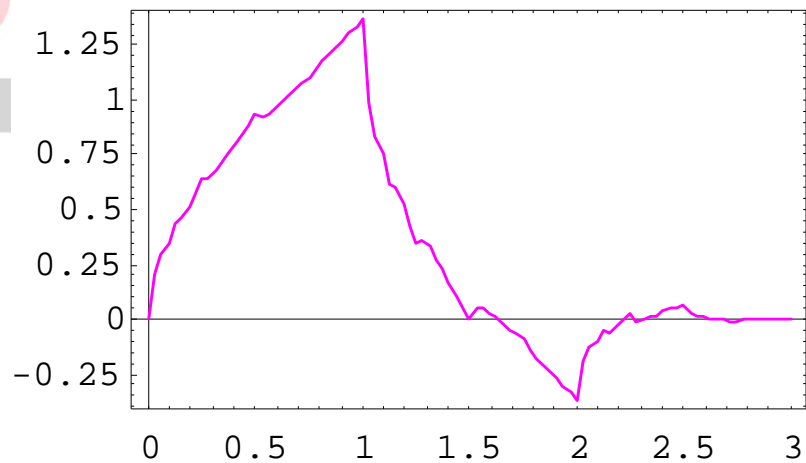
# Podział pasma częstotliwościowego sygnału w wyniku trójpoziomowej dekompozycji falkowej



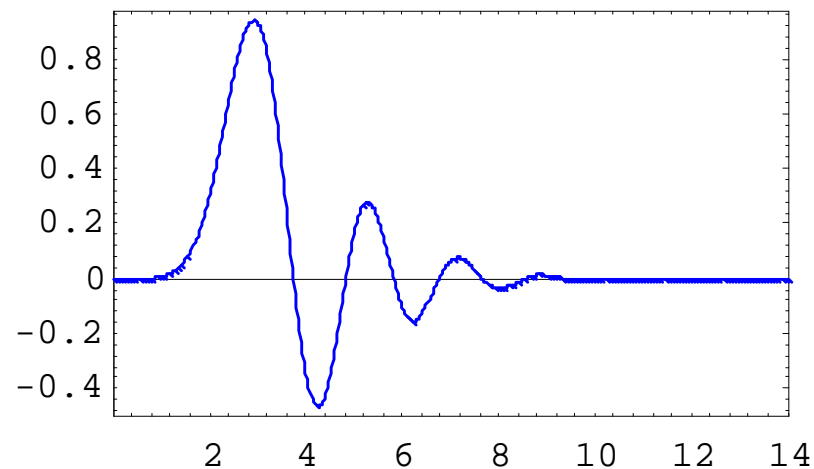


# Funkcje skalujące i falki Daubechies

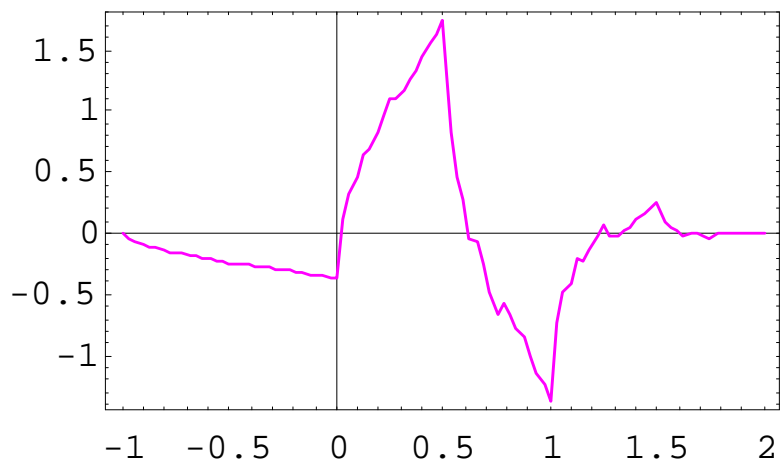
Daubechies phi of order 2



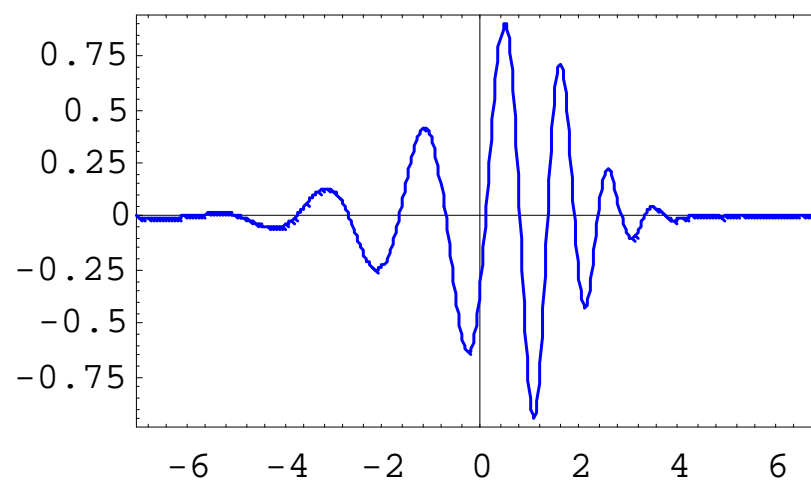
Daubechies phi of order 12

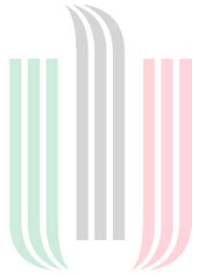


Daubechies psi of order 2



Daubechies psi of order 12

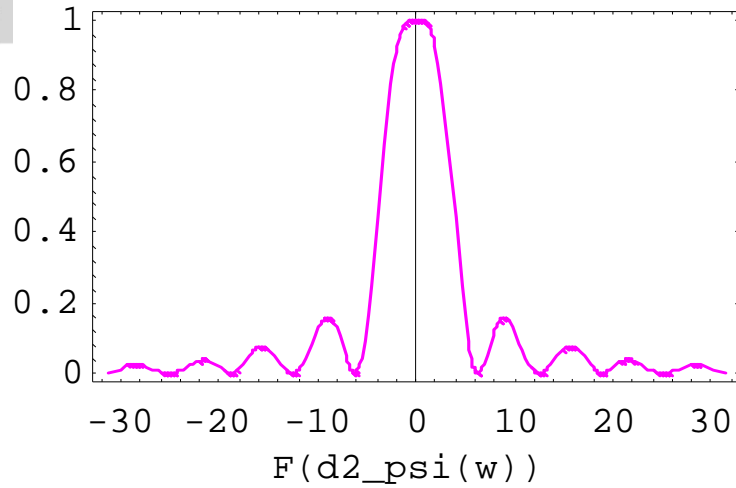




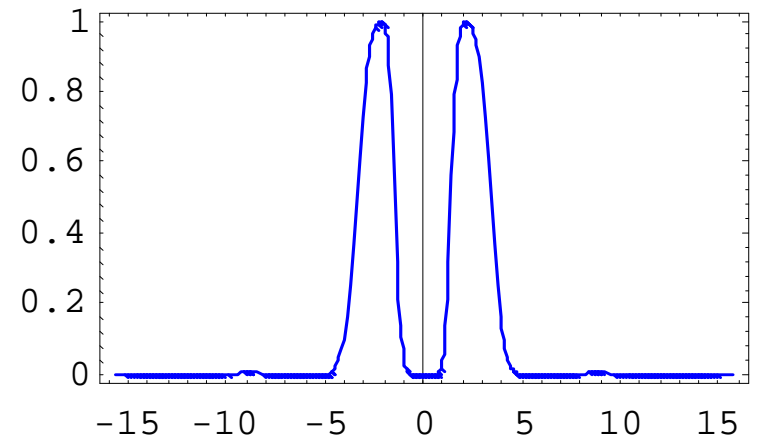
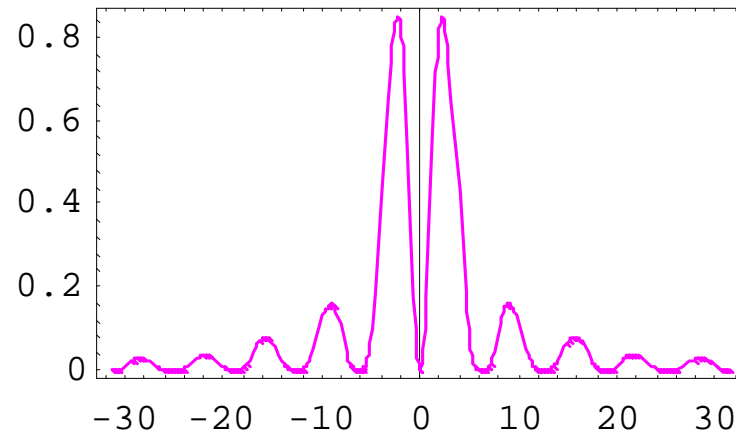
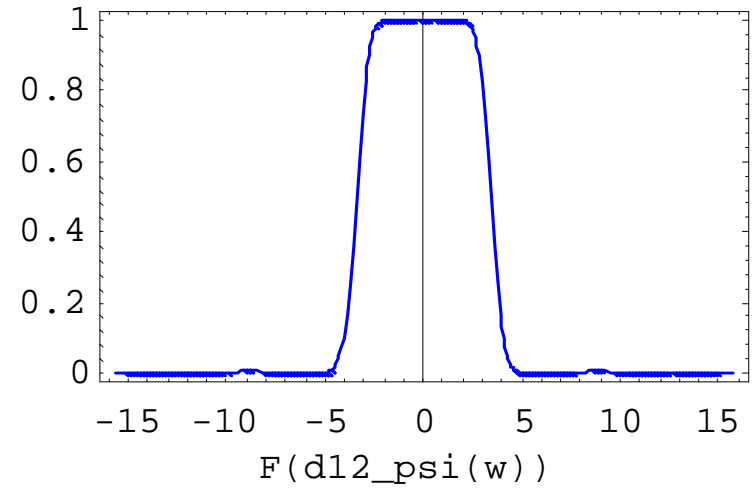
AGH

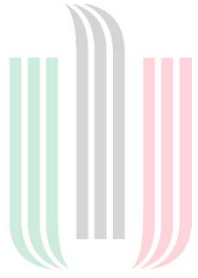
# Widmo funkcji skalujących i falek

$F(d2\_phi(w))$



$F(d12\_phi(w))$





AGH

## Zależność pomiędzy skalą i częstotliwością

$[f_{\min}, f_{\max}]$  przedział w którym widmo  $\hat{\psi}(f)$  ma większość energii

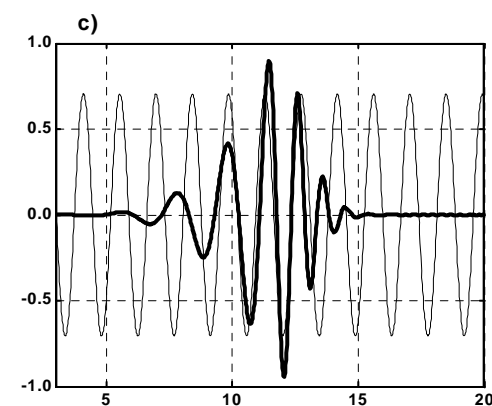
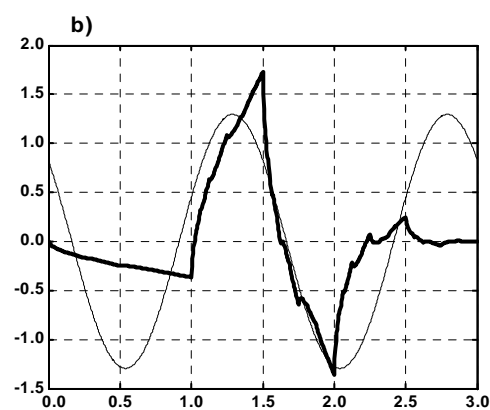
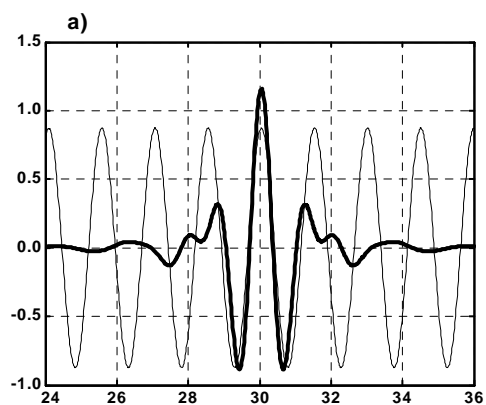
Środek widma podstawowej falki  $f_0 = \int_0^{\infty} f |\hat{\psi}(f)|^2 df$

Kwadrat odchylenia od środka  $\delta^2 = \int_0^{\infty} (f - f_0)^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df$

Szerokość pasma  $2\delta = f_{\max} - f_{\min}$

czyli  $f_{\min} = f_0 - \delta$   $f_{\max} = f_0 + \delta$

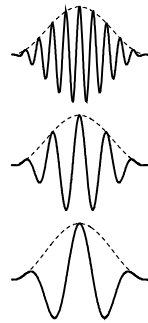
# Falki i odpowiadające im sinusoidy o częstotliwości środkowej



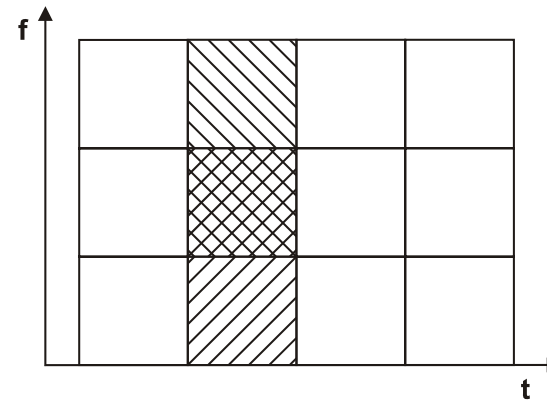
Falka Meyera i falki Daubechies rzędu 2 oraz rzędu 12

# Porównanie okienkowej transformacji Fouriera z transformacją falkową

a)

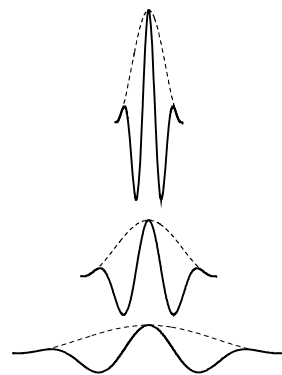


b)

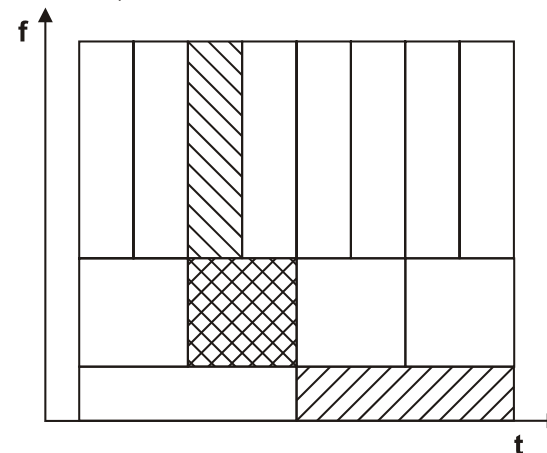


okno Hanninga

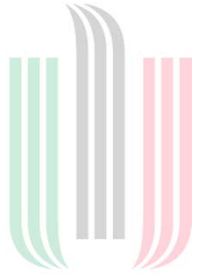
c)



d)







AGH  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

## Definicja transformacji falkowej

$$\tilde{s}_\psi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

gdzie  $s \in L^2(\mathbb{R})$        $b \in \mathbb{R}$        $a \in \mathbb{R}^+$

$$s(t) = \frac{1}{\eta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 \sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_\psi(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db da$$

gdzie

$$\eta = 2 \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

$\hat{\psi}(0) = 0$  jest równoważne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$



# Wybrane własności transformacji Fouriera

1) zachowanie iloczynu skalarnego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_1(f)\hat{s}_2^*(f)df$$

2) skalowanie w dziedzinie czasu

$$s(t/a) \leftrightarrow |a| \hat{s}(af)$$

3) przesunięcie w dziedzinie czasu

$$s(t - \tau) \leftrightarrow \hat{s}(f)e^{-2\pi j f \tau}$$



# Własności transformacji falkowej

1) zachowuje energię sygnału

$$\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\eta} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_{\psi}^2(a, b) \frac{dadb}{a^2}$$

2) zachowuje skalowanie w dziedzinie czasu

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}} s(t/a_0) \Leftrightarrow \tilde{s}_{\psi}(a/a_0, b/a_0)$$

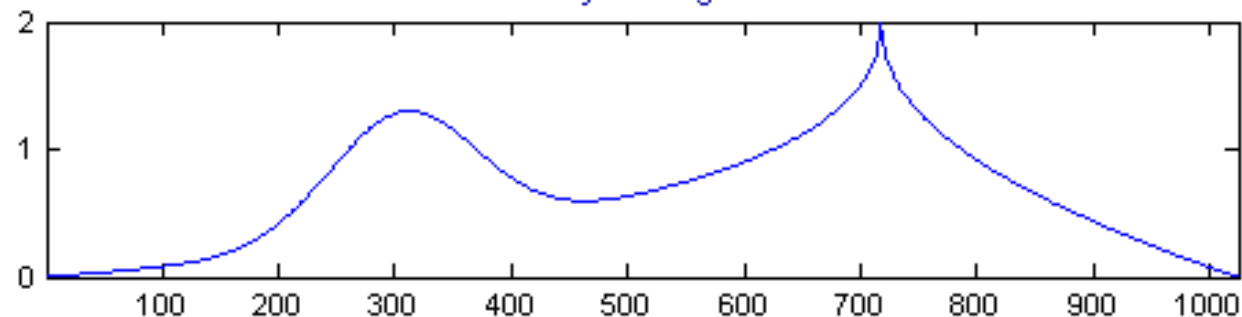
3) zachowuje przesunięcie w dziedzinie czasu

$$s(t - t_0) \Leftrightarrow \tilde{s}_{\psi}(a, b - t_0)$$

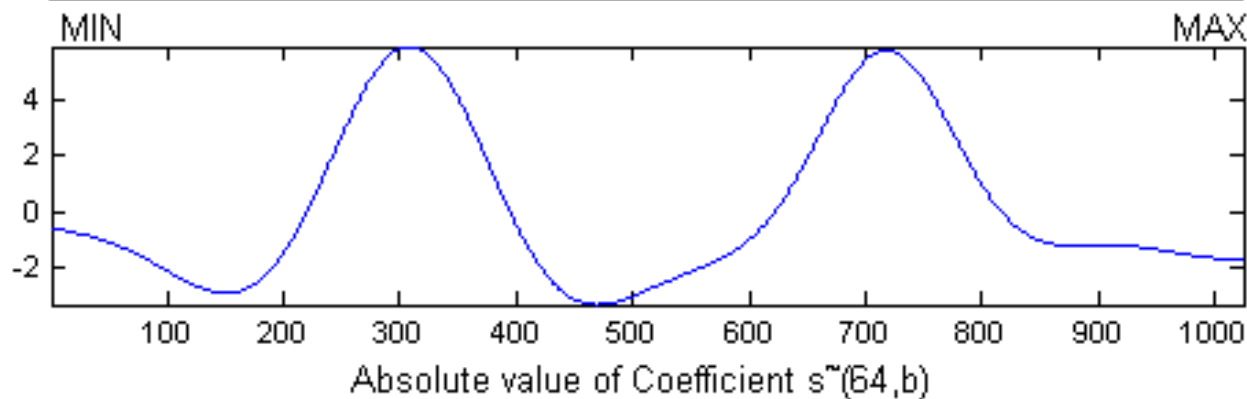
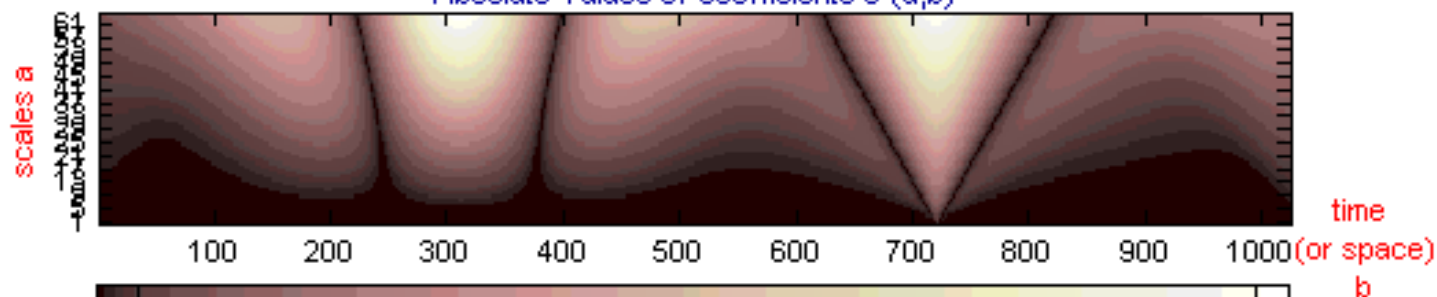
# Przykład widma falkowego

wavelet used : mexican hat

Analyzed signal.



Absolute Values of Coefficients  $s^*(a,b)$





# Zastosowanie falek jednowymiarowych do tworzenia falek dwuwymiarowych

Dla sygnałów dwuwymiarowych (obrazy) w  $L^2(\mathbb{R}^2)$  można utworzyć iloczyny tensorowe

$$\psi_{m_1, m_2, n_1, n_2}(x, y) = \psi_{m_1, n_1}(x) \psi_{m_2, n_2}(y)$$

Najczęściej stosuje się metodę Mallata

$$\varphi_{m, n_1, n_2}(x, y) = \varphi_{m, n_1}(x) \varphi_{m, n_2}(y)$$

$$\psi_{m, n_1, n_2}(x, y) = \psi_{m, n_1}(x) \psi_{m, n_2}(y)$$

gdzie  $m, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  oraz

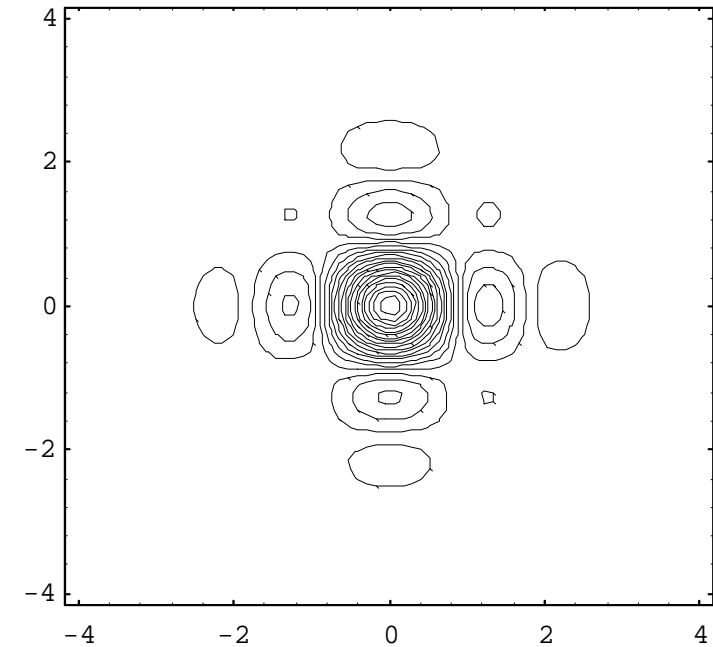
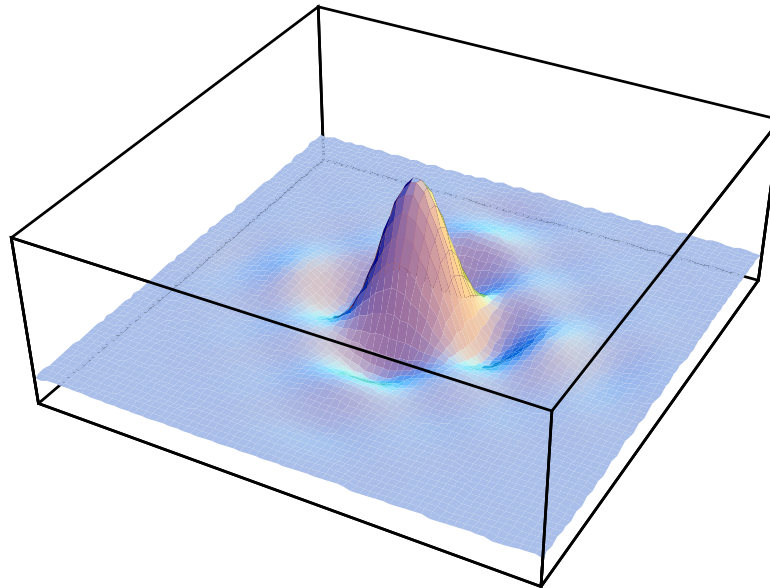
$$\varphi_{m, n_1}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m x - n_1)$$

$$\varphi_{m, n_2}(y) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m y - n_2)$$

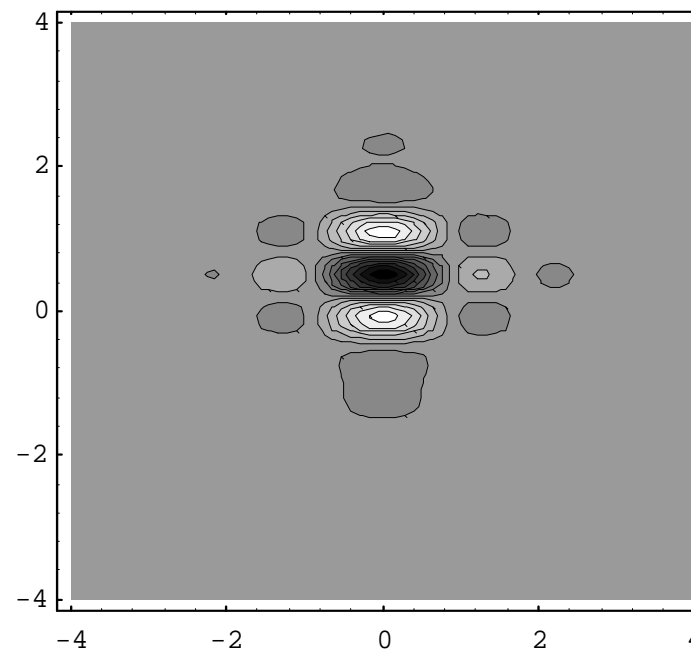
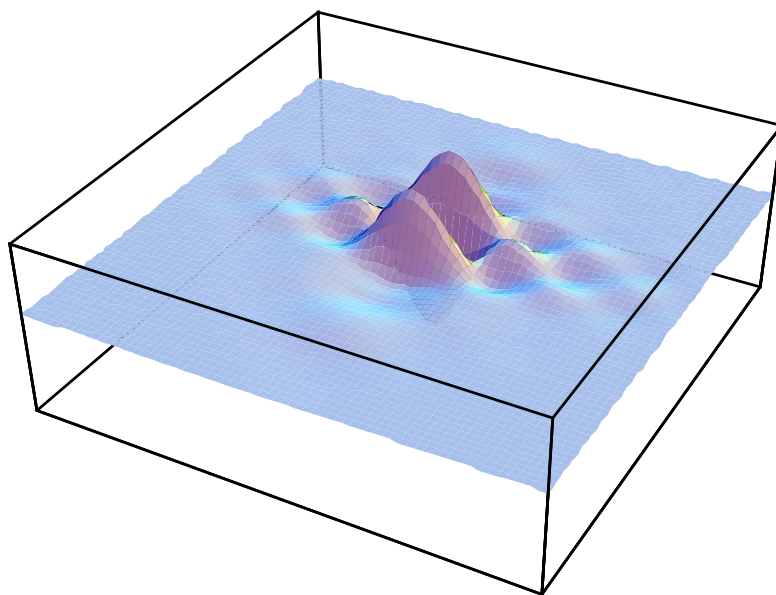
$$\psi_{m, n_1}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - n_1)$$

$$\psi_{m, n_2}(y) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m y - n_2)$$

# Dwuwymiarowa falka jako iloczyn dwóch falek jednowymiarowych

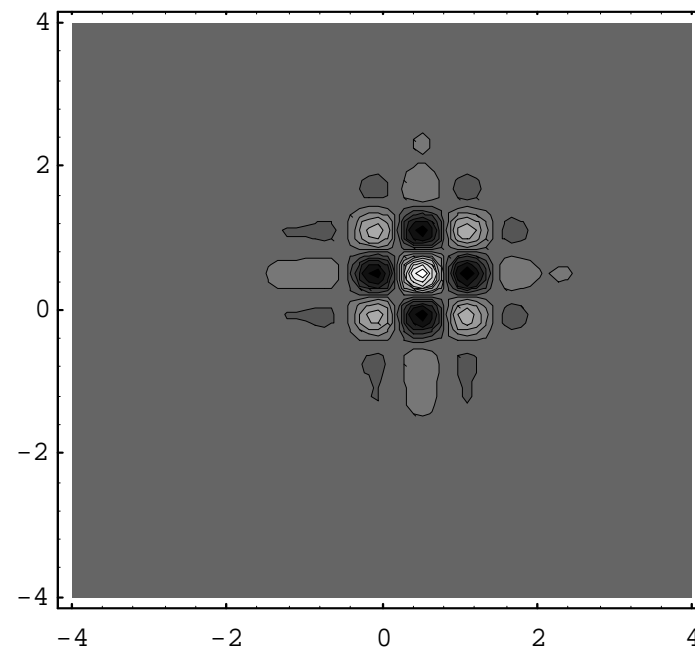
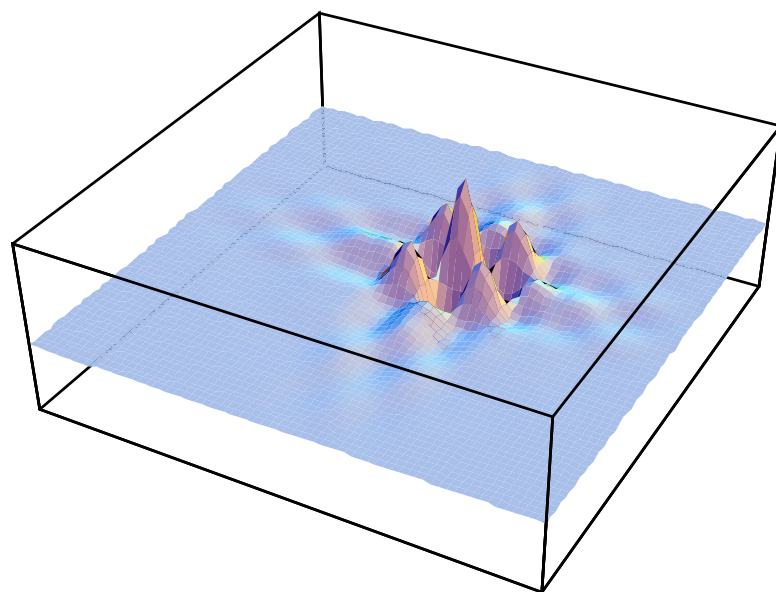


## Przykład dwuwymiarowej falki



Falka matczyna jako iloczyn falki i funkcji skalującej

# Przykład dwuwymiarowej funkcji skalującej jako iloczyn dwóch funkcji skalujących





## Dekompozycja obrazu

$$\varphi_{m,n_1,n_2}(x, y) = \varphi_{m,n_1}(x) \varphi_{m,n_2}(y)$$

$$\psi_{m,n_1,n_2}^v(x, y) = \varphi_{m,n_1}(x) \psi_{m,n_2}(y)$$

$$\psi_{m,n_1,n_2}^h(x, y) = \psi_{m,n_1}(x) \varphi_{m,n_2}(y)$$

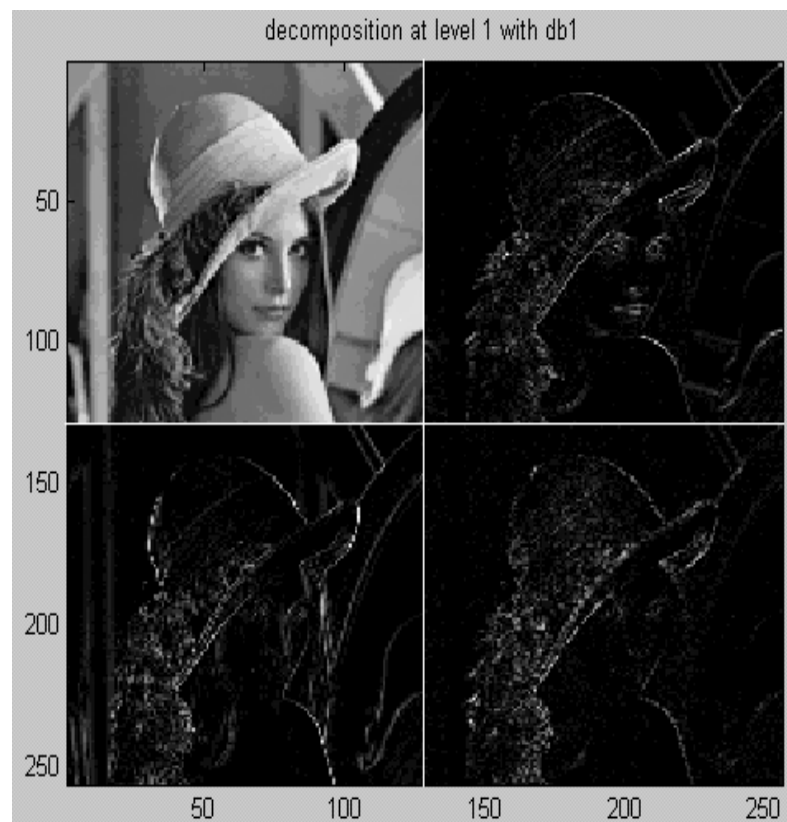
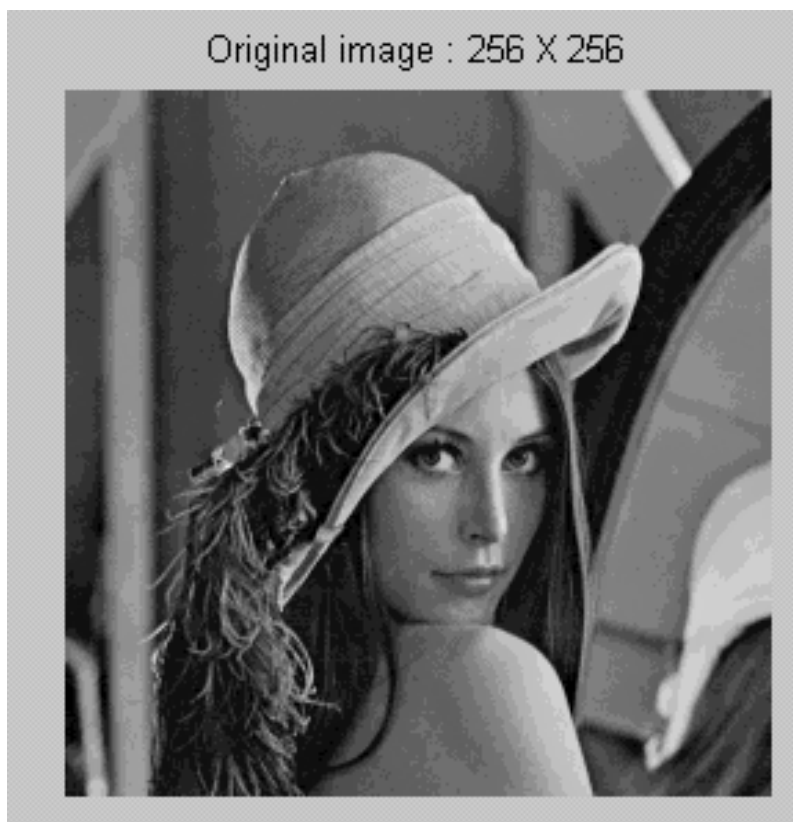
$$\psi_{m,n_1,n_2}^d(x, y) = \psi_{m,n_1}(x) \psi_{m,n_2}(y)$$

$$s_{m+1}(x, y) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{m+1,n_1,n_2} \varphi_{m+1,n_1,n_2}(x, y) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{m+1,n_1,n_2} \varphi_{m+1,n_1}(x) \varphi_{m+1,n_2}(y)$$

$$s_{m+1}(x, y) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{m,n_1,n_2} \varphi_{m,n_1,n_2}(x, y) + \sum_{n_1} \sum_{n_2} e_{m,n_1,n_2} \psi_{m,n_1,n_2}^v(x, y) +$$

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} f_{m,n_1,n_2} \psi_{m,n_1,n_2}^h(x, y) + \sum_{n_1} \sum_{n_2} g_{m,n_1,n_2} \psi_{m,n_1,n_2}^d(x, y)$$

# Dekompozycja Leny



## Ilustracja reprezentacji: wertykalnej, horyzontalnej i diagonalnej

