(ang. Integral Transforms)

Transformacje całkowe

Są przekształceniami wzajemnie jednoznacznymi w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem

$$\vec{s}(f) = \int_T s(t)\,\psi(f,t)\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad s(\tau) = \int_F \vec{s}(f)\,\theta(\tau,f)\,df$$

Transformacja całkowa

Odwrotna transformacja całkowa

Po podstawieniu otrzymujemy

$$s(\tau) = \int_F \int_T s(t)\,\psi(f,t)\,dt\,\theta(\tau,f)\,df = \int_T s(t) \int_F \psi(f,t)\,\theta(\tau,f)\,df\,dt$$

musi być

$$s(\tau) = \int_T s(t)\,\delta(t-\tau)\,dt$$

z tego wynika

$$\int_F \psi(f,t)\,\theta(\tau,f)\,df = \delta(t-\tau)$$

Przykład – Definicja transformacji Fouriera

Są przekształceniami wzajemnie jednoznacznymi w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem

$$\vec{s}(f) = \int_T s(t)\,\psi(f,t)\,dt \quad \longleftrightarrow \quad s(\tau) = \int_F \vec{s}(f)\,\theta(\tau, f)\,df$$

w przypadku transformacji Fouriera

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-2\pi jft}\,dt \quad \longleftrightarrow \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)\,e^{2\pi jft}\,dt$$

a jądra tych transformacji są następujące

$$\psi(f,t) = e^{-2\pi jft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$$

$$\theta(t, f) = e^{2\pi jft} = \cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)$$

Przykład – Transformacja Fouriera

Czy rzeczywiście $\int_F \psi(f,t)\,\theta(\tau,f)\,df = \delta(t-\tau)$ dla transformacji Fouriera?

Sprawdźmy to!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi jft} e^{2\pi jf\tau}\,df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi jf(t-\tau)}\,df = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} df & \text{gdy} \quad t=\tau \\ ? & \text{gdy} \quad t\neq\tau \end{cases} = \begin{cases} \infty+\infty & \text{gdy} \quad t=\tau \\ 0 & \text{gdy} \quad t\neq\tau \end{cases} = \delta(t-\tau)$$

$$? = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi f(t-\tau)\right)df - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(2\pi f(t-\tau)\right)df = 0$$

w sensie wartości głównych Cauchy'ego

Jądra samosprzężone

Definicja $\theta(t, f) = \psi^*(f, t)$

Np. jest tak dla transformacji Fouriera, bo

$$\psi(f, t) = e^{-2\pi j f t} = \cos(2\pi f t) - j\sin(2\pi f t)$$

$$\theta(t, f) = e^{2\pi j f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$$

Iloczyn skalarny transformat

Załóżmy, że mamy dwa sygnały $s_1(t)$ i $s_2(t)$.

Dla tych sygnałów możemy wyznaczyć transformaty

$$\vec{s}_1(f) = \int_T s_1(t)\,\psi(f,t)\,dt \qquad \vec{s}_2(f) = \int_T s_2(\tau)\,\psi(f,\tau)\,d\tau$$

a następnie iloczyn skalarny transformat

$$\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = \int_F \vec{s}_1(f)\,\vec{s}_2^{\,*}(f)\,df = \int_F \int_T \int_T s_1(t)\,\psi(f,t)\,s_2^*(\tau)\,\psi^*(f,\tau)\,d\tau\,dt\,df$$

Wzór Rayleigha

Skoro $\psi^*(f,t) = \theta(t, f)$ to

$$\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = \int_F \vec{s}_1(f)\, \vec{s}_2^{\,*}(f)\, df = \int_F \int_T \int_T s_1(t)\, \psi(f,t)\, s_2^*(\tau)\, \psi^*(f,\tau)\, d\tau\, dt\, df$$

$$= \int_T s_1(t) \int_T s_2^*(\tau)\, \delta(\tau - t)\, d\tau\, dt = \int_T s_1(t)\, s_2^*(t)\, dt$$

bo $\int_F \psi(f,t)\, \psi^*(f,\tau)\, df = \int_F \psi(f,t)\, \theta(\tau, f)\, df = \delta(t-\tau)$

czyli $\boxed{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle}$

Oznacza to, że transformacja zachowuje iloczyn skalarny, jeśli jądra są samosprzężone.

Wzór Parsevala

Skoro $\boxed{\langle \overleftrightarrow{s}_1, \overleftrightarrow{s}_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle}$

to przyjmując jednakowe oba sygnały, czyli $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$,

i pamiętając, że iloczyny skalarne dla tych samych elementów

są kwadratami norm, otrzymujemy $\boxed{\left\| \overleftrightarrow{s} \right\|^2 = \left\| s \right\|^2}$

a stąd ostatecznie $\boxed{\left\| \overleftrightarrow{s} \right\| = \left\| s \right\|}$

Oznacza to, że transformacja zachowuje normę, jeśli jądra są samosprzężone.

Przykład – Transformacja Fouriera

Jądra samosprzężone $\psi(f,t) = \theta^*(t,f)$

$$\psi(f,t) = e^{-2\pi jft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$$

$$\theta(t,f) = e^{2\pi jft} = \cos(2\pi f\tau) + j\sin(2\pi f\tau)$$

$$\int_F \psi(f,t)\,\theta(\tau,f)\,df = \int_F e^{-2\pi jft}\,e^{2\pi jf\tau}df = \delta(t-\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \rangle = \int_F s_1(t)\,s_2(t)\,dt$$ czyli $$\boxed{\langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle} \Longrightarrow \boxed{\|\hat{s}\| = \|s\|}$$

Transformacja Fouriera zachowuje energię, bo kwadrat normy jest fizycznie interpretowany jako energia!

Parzystość widma rzeczywistego

Dla sygnałów o wartościach rzeczywistych

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi jft}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\left[\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\right] dt = \hat{r}(f) + j\,\hat{i}(f)$$

gdzie

Sugestie:

$$\hat{r}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi ft)\, dt \longleftarrow$$ transformacja kosinusowa?

$$\hat{i}(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(2\pi ft)\, dt \longleftarrow$$ transformacja sinusowa?

Własności $\hat{r}(-f) = \hat{r}(f)$ sugerują, że wystarczy je wyznaczać

$\hat{i}(-f) = -\hat{i}(f)$ tylko dla „dodatnich” częstotliwości.

Transformacja kosinusowa

$$s^c(\omega) = \int_0^\infty s(t)\cos(\omega t)\,dt \qquad \omega \geq 0$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s^c(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega \qquad t \geq 0$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega t)\int_0^\infty s(\tau)\cos(\omega \tau)\,d\tau\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s(\tau)\int_0^\infty \cos(\omega t)\cos(\omega \tau)\,d\omega\,d\tau$$

Aby jądra transformacji kosinusowej były samosprzężone można przyjąć definicje

$$s^c(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s(t)\cos(\omega t)\,dt \qquad s(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^c(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

Zależność między transformacją kosinusową i Fouriera

Wiemy, że dla funkcji parzystej transformata Fouriera ma wartości rzeczywiste.

Sygnał parzysty $s^p(t) = s(|t|)$ możemy utworzyć z dowolnego sygnału

wykorzystując tylko jego wartości dla $t \geq 0.$

$$\hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s^p(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} s(-t)\, e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t} dt =$$

$$t^{stare} = -t^{nowe}$$

$$\int_{0}^{\infty} s(t)\, e^{j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} s(t)\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right) dt =$$

$$2\int_{0}^{\infty} s(t)\cos(\omega t)\, dt$$

Zatem dla funkcji parzystej $\hat{s}(\omega) = 2s^c(\omega)$

Własności transformacji kosinusowej

1. Skalowanie $s(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} s^c(\omega / a)$ gdzie $a > 0$

2. Przesunięcie $s^p(t+a) + s^p(t-a) \Leftrightarrow 2s^c(\omega)\cos(a\omega)$

gdzie $a > 0$ $s^p(t) = s(|t|)$

3. Splot

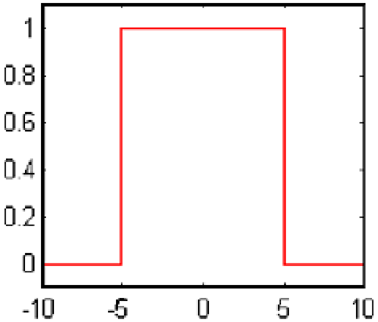
Niech $s_1(t), s_2(t)$ będą zdefiniowane na półprostej $[0,\infty)$ to wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1^p(\tau) s_2^p(t-\tau)\, d\tau \Leftrightarrow 2s_1^c(\omega)\, s_2^c(\omega)$$

gdzie $s_1^p(\tau) = s_1(|\tau|)$ i $s_2^p(\tau) = s_2(|\tau|)$

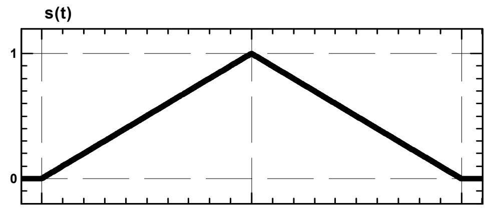
Przykłady transformat kosinusowych

1. Impuls prostokątny



$$s(t)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad -T\le t\le T\\ 0 & \text{dla} \quad t<-T \text{ i } t>T\end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^T \cos(\omega t)\,dt=\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

2. Impuls trójkątny



$$\Updownarrow$$

$$\int_0^{T/2}\frac{2t}{T}\cos(\omega t)\,dt+\int_{T/2}^{T}\frac{2(T-t)}{T}\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{T\omega^2}\left[2\cos(T\omega/2)-\cos(T\omega)-1\right]$$

3. $s(t)=1/\sqrt{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$

Przykłady transformat kosinusowych

4. $s(t) = \left(\alpha^2 + t^2\right)^{-1} \Longleftrightarrow \int\limits_0^\infty \left(\alpha^2 + t^2\right)^{-1} \cos(\omega t)\, dt = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\omega}$ $\quad \alpha > 0$

5. $s(t) = \left(\alpha^2 - t^2\right)^{-1} \Longleftrightarrow \int\limits_0^\infty \left(\alpha^2 - t^2\right)^{-1} \cos(\omega t)\, dt = \frac{\pi}{2\alpha} \sin(\alpha\omega)$ $\quad \alpha > 0$

Wartość główna tej całki!

$$\int\limits_0^\infty \left(\alpha^2 - t^2\right)^{-1} \cos(\omega t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_0^{\alpha-\varepsilon} \left(\alpha^2 - t^2\right)^{-1} \cos(\omega t)\, dt + \int\limits_{\alpha+\varepsilon}^\infty \left(\alpha^2 - t^2\right)^{-1} \cos(\omega t)\, dt \right]$$

$$\varepsilon > 0$$

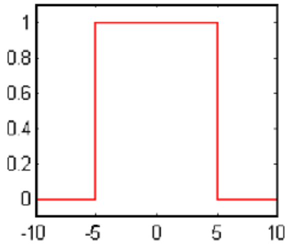
Przykłady transformat kosinusowych

6. $s(t) = e^{-\alpha t}$ $\quad \alpha > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\omega t)\, dt = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

Transformata Laplace'a dla $\cos(\omega t)$

7. $s(t) = e^{-\alpha t^2}$ $\quad \alpha > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^\infty e^{-\alpha t^2} \cos(\omega t)\, dt = 0{,}5\sqrt{\pi / \alpha}\, e^{-\omega^2/4\alpha}$

8. $s(t) = \dfrac{\sin(\alpha t)}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^\infty \dfrac{\sin(\alpha t)}{t} \cos(\omega t) dt = \begin{cases} \pi/2 & \text{gdy} \quad \omega < \alpha \\ \pi/4 & \text{gdy} \quad \omega = \alpha \\ 0 & \text{gdy} \quad \omega > \alpha \end{cases}$



9. $s(t) = e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}5\left[\dfrac{\alpha + \omega}{\beta^2 + (\alpha + \omega)} + \dfrac{\alpha - \omega}{\beta^2 + (\alpha - \omega)}\right]$

Transformacja sinusowa

$$s^s(\omega) = \int_0^\infty s(t)\sin(\omega t)\,dt \qquad \omega \geq 0$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s^s(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega \qquad t \geq 0$$

Zatem dla funkcji nieparzystej $s^{np}(t) = \begin{cases} s(t) & \text{gdy} \quad t \geq 0 \\ -s(-t) & \text{gdy} \quad t < 0 \end{cases}$

utworzonej z dowolnego sygnału, ale z wartości tylko dla $t \geq 0$

Uzyskujemy zależność pomiędzy transformatą Fouriera i sinusową $\hat{s}^{np}(\omega) = -2js^s(\omega)$